Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
G. Bärwolff, C. Mehl, G. Penn-Karras 09.10.2013

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **lesbarer Schrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe
12 Punkte

Es sei
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto -x^2 + xz - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{24}z^3.$$

a) Berechnen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

b) Sei $A := \{(x,y,z) : |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$. Besitzt f auf A globale Extrema? Besitzt f auf $\mathbb{R}^3$ globale Extrema? Begründen Sie ihre Antworten.

c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0,0)$.

2. Aufgabe
10 Punkte

Es sei γ die Kreislinie in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt $(3,4,0)$, die durch den Punkt $(0,0,0)$ verläuft.

a) Geben Sie eine Parametrisierung von γ an.

b) Berechnen Sie die Länge von γ.

c) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 3z \\ 2x \\ 4 \end{pmatrix}$ über γ.

d) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential besitzt und berechnen Sie gegebenfalls eins.

3. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $\vec{x}$ durch
$$\vec{x} : [0,2] \times [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ (a,\varphi,b) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Es sei L das Bild von $\vec{x}$. Skizzieren Sie L.

(Hinweis: Welches Objekt ergibt sich für $b = 1$? Was ändert sich, wenn b verändert wird?)

b) Berechnen Sie $\vec{x}\,'(a,\varphi,b)$ und $|\det \vec{x}\,'(a,\varphi,b)|$.

c) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben durch
$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 3xy^2 - yz \\ 4 \\ xy^2 + 3x^2z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Flußintegral von $\vec{v}$ durch den Rand von L.

(Hinweis: Sie können diesen Teil auch ohne Teil a) lösen, nutzen Sie einen geeigneten Integralsatz und die Transformationsformel.)

Verständnisteil

4. Aufgabe

12 Punkte

Skizzieren Sie die folgenden Mengen oder beschreiben Sie diese in Worten. Geben Sie anschließend (ohne Begründung) für jede Menge an, welche der folgenden Eigenschaften die Menge besitzt und welche nicht: offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt.

a) $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5x = y\big\}$,

b) $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq 2y,\ y \in [0, 1]\big\}$,

c) $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{N}, |x| < 1, -2 < y < 2\big\}$,

d) $D = \big\{(2a\cos b, 3a\sin b) \in \mathbb{R}^2 : a \in]0, 1[,\ b \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]\big\}$.

5. Aufgabe

6 Punkte

Bei einer Geschwindigkeitsmessung der Polizei wird gemessen, wieviel Zeit vorbeifahrende Fahrzeuge benötigen, um einen ca. 210 m langen Streckenabschnitt zurückzulegen. Dabei werden eine Messfehlertoleranz der Strecke von ± 5 m und ± 0.5 s in der Zeit angenommen.

Für ein Taxi wurde eine Zeit von $t = 10.5$ s gemessen. Berechnen Sie die gemessene Durchschnittsgeschwindigkeit des Taxis auf dem Streckenabschnitt. Berechnen Sie weiter mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der sich das Taxi mindestens bewegt haben muss.

(*Hinweis: Für die Durchschnittsgeschwindigkeit v gilt $v(s, t) = \frac{s}{t}$. Die erlaubten* 50 km/h *überschreitet das Taxi deutlich,* $1\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.6\frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

6. Aufgabe

12 Punkte

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige offene, nichtleere Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Begründen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie diese durch ein Gegenbeispiel.

a) Es seien $\vec{a} \in D$ und $(\vec{x}_n)$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = 0$. Dann ist $(f(\vec{x}_n))$ eine konvergente Folge.

b) Hat f in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Minimum, dann ist $f''(\vec{x}_0)$ positiv definit.

c) Ist $f''(\vec{x}_0)$ für $\vec{x}_0 \in D$ nicht negativ definit und besitzt f ein globales Maximum in $\vec{x}_0$, dann ist $f'(\vec{x}_0) = 0$.

d) Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$ für alle $(x, y) \in D$, dann ist g stetig auf D.

e) Die Hessematrix der Funktion $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = -ax^2 + 2xy - a^2y^2$ ist für alle $a > 1$ positiv definit.

f) Es sei $\vec{w}$ ein Vektorpotential des stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und sei $L \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, dann gilt $\iint_{\partial L} \vec{v}\ d\vec{O} = 0$.