Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
G. Bärwolff, C. Mehl, G. Penn-Karras 09.10.2013

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

<u>**Rechenteil**</u>

1. Aufgabe 12 Punkte

i) Wir berechnen zunächst die kritische Punkte:

$$(\nabla f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x+z \\ -y \\ x+\frac{1}{8}z^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Es folgt $y=0$ und aus der ersten Gleichung $z=2x$. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert $x+\frac{1}{2}x^2 = x(1+\frac{1}{2}x) = 0$. Die beiden kritischen Punkte sind also

$$\vec{x}_0 = (0,0,0) \quad \text{und} \quad \vec{x}_1 = (-2,0,4).$$

Um die Art der Extrema zu bestimmen, berechnen wir die zweite Ableitung, es ist

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4}z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f''(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Hauptminoren und erhalten

$$\det(-2) = -2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det f''(\vec{x}_0) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Alternativ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)\left((-2-\lambda)\lambda - 1\right) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

die Nullstellen -1, $1-\sqrt{2}$ (beide negativ) und $1+\sqrt{2} > 0$.
Das heißt, dass die Matrix $f''(\vec{x}_0)$ indefinit ist und in $\vec{x}_0$ somit ein Sattelpunkt liegt.
In $\vec{x}_1$ gilt

$$f''(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Hauptminoren

$$\det(-2) = -2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det f''(\vec{x}_0) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Alternativ wieder über das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)\left((-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1\right) = (-1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$$

hat die Nullstellen -1, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Diese sind alle negativ.

Das heißt, dass die Matrix $f''(\vec{x}_1)$ negativ definit ist und in $\vec{x}_1$ somit ein lokales Maximum liegt.

ii) A ist eine kompakte Menge und f ist als Polynom stetig. Somit nimmt f auf A sowohl globales Maximum, als auch Minimum an.

Allerdings nimmt f wegen $\lim\limits_{z\to\pm\infty} f(2,2,z) = \pm\infty$ keine globalen Extrema auf $\mathbb{R}^3$ an.

iii) Wir nutzen die Ergebnisse aus dem ersten Teil der Aufgabe:

$$f(0,0,0) = 0, \quad (\nabla f)(0,0,0) = \vec{0}, \quad f''(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow (Tf)(x,y,z) = \frac{1}{2}(-2x^2 + 2xz - y^2) = -x^2 + xz - \frac{1}{2}y^2.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

i) Zunächst berechnen wir den Radius r der Kreislinie. Dieser ist gegeben durch den Abstand des Punktes $(0,0,0)$ auf der Kreislinie zu dem Kreismittelpunkt $(3,4,0)$, wir erhalten also

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Damit ist eine Parametrisierung gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} 5\cos\varphi + 3 \\ 5\sin\varphi + 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine alternative Parametrisierung ist gegeben durch

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} 5\sin\varphi + 3 \\ 5\cos\varphi + 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Da γ einen Kreis vom Radius 5 beschreibt, ist die Länge also gegeben durch

$$L(\gamma) = 2\pi \cdot 5 = 10\pi.$$

iii) Für das Integral gilt

$$\int_\gamma \vec{v}\ \vec{\mathrm{d}}s = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 2(5\cos\varphi + 3) \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5\sin\varphi \\ 5\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} 50\cos^2\varphi + 30\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \left[50\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{2}\right) + 30\sin\varphi\right]_0^{2\pi}$$
$$= 50 \cdot \frac{2\pi}{2} = 50\pi.$$

(Mit der Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ erhält man hier das Ergebnis -50π.)

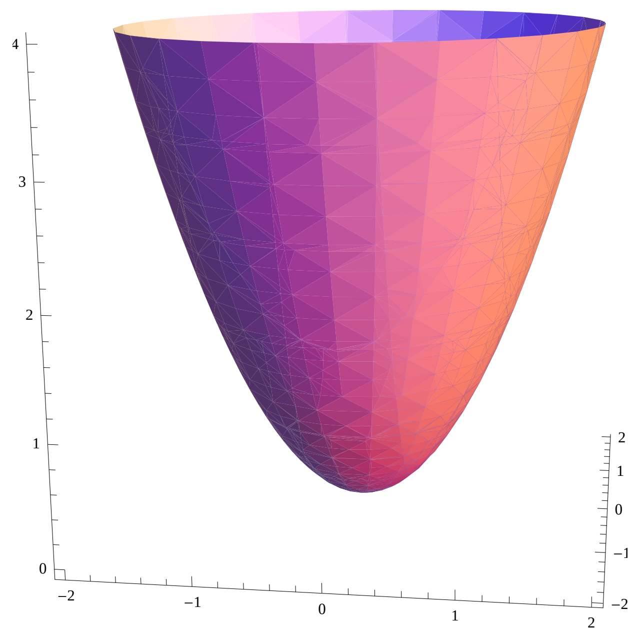
iv) Da γ eine geschlossene Kurve ist und $\int_\gamma \vec{v}\ \vec{\mathrm{d}}s \neq 0$ gilt, kann $\vec{v}$ kein Potential haben.

Alternativ kann man hier die Rotation berechnen, es gilt:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{v})(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \ \vec{v} \text{ hat kein Potential.}$$

3. Aufgabe 8 Punkte

i) Die Skizze für $b = 1$:



Für kleineres b nähern sich die Punkte parallel zur $x-y-$Ebene radial der z-Achse an. Insgesamt entsteht also der obige, allerdings ausgefüllte Paraboloid.

ii) Es gilt

$$\vec{x}\,'(a,\varphi,b) = \begin{pmatrix} b\cos\varphi & -ab\sin\varphi & a\cos\varphi \\ b\sin\varphi & ab\cos\varphi & a\sin\varphi \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante erhalten wir damit (mit Entwicklung nach der dritten Zeile)

$$\left|\det \vec{x}\,'(a,\varphi,b)\right| = 2a \cdot \left|\det \begin{pmatrix} -ab\sin\varphi & a\cos\varphi \\ ab\cos\varphi & a\sin\varphi \end{pmatrix}\right| = 2a \cdot \left|-a^2 b\sin^2\varphi - a^2 b\cos^2\varphi\right| = 2a^3 b.$$

iii) Für das Integral nutzen wir den Satz von Gauß. Dazu berechnen wir zunächst die Divergenz von $\vec{v}$, es ist

$$(\text{div } \vec{v})(x,y,z) = 3y^2 + 3x^2.$$

Weiter nutzen wir den Transformationssatz. Mit der Parametrisierung $\vec{x}$ gilt

$$3x^2 + 3y^2 = 3a^2b^2 = (\text{div } \vec{v})(\vec{x}(a,\varphi,b)).$$

Damit können wir nun das Integral berechnen, es ist

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial L} \vec{v}\; \mathrm{d}\vec{O} &= \iiint\limits_{L} \text{div } \vec{v}\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y\; \mathrm{d}z = \iiint\limits_{L} 3(x^2+y^2)\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y\; \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 3a^2b^2 \cdot 2a^3 b\; \mathrm{d}a\; \mathrm{d}\varphi\; \mathrm{d}b = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 6a^5 b^3\; \mathrm{d}a\; \mathrm{d}\varphi\; \mathrm{d}b \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} 64 b^3\; \mathrm{d}\varphi\; \mathrm{d}b = 128\pi \int\limits_0^1 b^3\; \mathrm{d}b = 32\pi. \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

12 Punkte

- A beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit der Steigung -5. Die Menge ist abgeschlossen, aber weder beschränkt, kompakt, noch offen.
- B beschreibt ein Dreieck im ersten und zweiten Quadranten mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(-1,1)$ und $(2,1)$, die Randkurven gehören dabei zur Menge. Damit ist B abgeschlossen, beschränkt und kompakt aber nicht offen.
- C beschreibt eine Menge von Rechtecken mit den Seitenlängen 2 und 4, die parallel zur x-y-Ebene liegen und symmetrisch zu beiden Achsen sind. Diese Menge ist weder offen (jeder Punkt der Menge ist selbst ein Randpunkt), noch abgeschlossen (die Punkte für die gilt $|x| = 1, z \in \mathbb{N}$ sind Randpunkte, gehören aber nicht zur Menge). Sie ist auch nicht beschränkt und nicht kompakt.
- D beschreibt das Viertel einer Ellipsenscheibe mit den Halbachsen 2 und 3 im 3.Quadranten. Die Menge ist weder offen noch abgeschlossen und damit auch nicht kompakt. Sie ist allerdings beschränkt.

5. Aufgabe

6 Punkte

Gemessen wurden

$$\bar{s} = 210 \text{ m}, \qquad \bar{t} = 10,5 \text{ s}.$$

Damit beträgt die gemessene Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{210}{10.5}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s} = 72\frac{km}{h}.$$

Die Mindestdurchschnittsgeschwindigkeit berechnen wir mit dem Fehlerschrankensatz, dabei gilt

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)\right| \leq \frac{1}{10} = 0,1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(s,t) = -\frac{s}{t^2} \qquad \Rightarrow \left|\frac{\partial v}{\partial t}(s,t)\right| \leq \frac{215}{10^2} = 2,15.$$

Mit dem Fehlerschrankensatz gilt dann

$$|v(s,t) - v(\bar{s},\bar{t})| \leq 0,1 \cdot 5 + 2,15 \cdot 0,5 = 1,575 \left(\frac{m}{s}\right)$$

für alle (s,t) im untersuchten Bereich und sommit ist die mindestmögliche Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v_{min} = 20 - 1,575 = 18,425 \ \frac{m}{s} = 66,33 \ \frac{km}{h}.$$

6. Aufgabe

12 Punkte

i) Richtig! Aus $\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = 0$ folgt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig, damit gilt $f(\vec{x}_n) \to f(\vec{a})$ für $n \to \infty$, das heißt $f(\vec{x}_n)$ konvergiert.

ii) Falsch! Ist z.B. $f(\vec{x}) = 0$, dann hat f auf ganz D lokale Minima, $f''(\vec{x})$ ist aber die Nullmatrix für alle $\vec{x} \in D$ und somit NICHT positiv definit.

iii) Richtig! Hat f ein globales Maximum in x_0, dann liegt dort auch ein lokales Maximum. Notwendige Bedingung für die Existenz einer lokalen Extremstelle in einer offenen Menge ist $f'(\vec{x}_0) = 0$, es muss also gelten.

iv) Richtig! Die partiellen Ableitungen sind stetig. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von f. Und daraus folgt die Stetigkeit.

v) Falsch! Es ist

$$q''_{x,y} = \begin{pmatrix} -2a & 2 \\ 2 & -2a^2 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptminoren sind $-2a$ und $4(a^3 - 1)$. Das heißt, dass für eine beliebige Zahl $a > 1$ die Matrix NEGATIV definit ist. Zum Beispiel haben die Hauptminoren für $a = 2$ die Werte $-4, 28$.

vi) Richtig! Es gilt

$$\iint_{\partial K} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{O} = \iint_{\partial K} \mathrm{rot}\ \vec{w}\, \mathrm{d}\vec{O} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_{K} \underbrace{\mathrm{div\ rot}\ \vec{w}}_{=0}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 0,$$

da $\vec{v}$ stetig differenzierbar und somit $\vec{w}$ zweimal stetig differenzierbar ist.