Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14
P. Bank, A. Gündel-vom-Hofe 17.02.2014

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript" gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Aufgabe
9 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y-x \\ x+z \\ 3z-y \end{pmatrix}$$

und das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto x^2y + yz.$$

(i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob der Ausdruck in der linken Spalte ein Skalarfeld, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\nabla(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\nabla(f))$			
$\nabla(\operatorname{rot}(f))$			
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$			

(ii) Berechnen Sie die definierten Ausdrücke aus Aufgabenteil (i).

2. Aufgabe
9 Punkte

Sei $\vec{\gamma}_1$ der Viertelkreis um den Ursprung mit Startpunkt $(0,0,2)^T$ und Endpunkt $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)^T$ und sei

$$\vec{\gamma}_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei das Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben durch

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+z \\ y \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie anschließend ein solches.

(ii) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{v}$ entlang $\vec{\gamma}_1$ und entlang $\vec{\gamma}_2$.

3. Aufgabe
10 Punkte

Gegeben seien der Rotationskörper $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z,\ z \in [0,3]\right\}$ sowie das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y^2 \\ xz^2 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Menge K.

(ii) Beschreiben Sie die Menge K in Zylinderkoordinaten.

(iii) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals $\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O}$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto -x^2 + \tfrac{1}{12}y^3 + 2yz - 2z^2.$$

Berechnen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion f.

5. Aufgabe

11 Punkte

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Rotationsfläche, welche entsteht, wenn die Funktion $z = 2/x$ mit $x \in [1,3]$ um die $z-$Achse rotiert.

(i) Skizzieren Sie die Menge M.

(ii) Geben Sie eine Parametrisierung der Menge M an.

(iii) Bestimmen Sie eine Normale an M im Punkt $(2,0,1)$ und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.
Hinweis: Eine Normale steht senkrecht auf der Fläche.

(iv) Bestimmen Sie die Randkurven von M und parametrisieren Sie diese.
Hinweis: Hierbei dürfen Sie die Orientierung vernachlässigen.

6. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ eine gegen $\vec{0}$ konvergente Folge und sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto e^{y\cdot\sin(x)} + \cos(z).$$

Dann konvergiert die Folge $(f(\vec{x}_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegen 0.

(ii) Sei $Q = [0,1]^3$ und sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten f_1, f_2 und f_3 stetig differenzierbar. Dann nimmt die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto f_1(x,y,z)\cdot(f_2(x,y,z) + f_3(x,y,z))$$

auf Q ihr globales Minimum an.

(iii) Seien $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(1)$. Dann folgt

$$\int_{\vec{\gamma}} \nabla(f)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

7. Aufgabe

5 Punkte

Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{(x-1)^k}{k}.$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz an den Rändern des Konvergenzbereiches und geben Sie den Konvergenzbereich an.