Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
P. Bank, A. Gündel-vom-Hofe

WS 13/14
17.02.2014

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y-x \\ x+z \\ 3z-y \end{pmatrix}$$

und das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto x^2y + yz.$$

(i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob der Ausdruck in der linken Spalte ein Skalarfeld, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\nabla(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\nabla(f))$			
$\nabla(\operatorname{rot}(f))$			
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$			

(ii) Berechnen Sie die definierten Ausdrücke aus Aufgabenteil (i).

(i) **(6 Punkte)**

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\nabla(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$		x	
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			x
$\operatorname{div}(\nabla(f))$	x		
$\nabla(\operatorname{rot}(f))$			x
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			x
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$	x		

(ii) **(3 Punkte)** Für die aus dem Aufgabenteil (i) definierten Ausdrücke erhalten wir:

- $\nabla(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$: Es gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v})(x,y,z) = -1 + 0 + 3 = 2$$

und damit folgt

$$\nabla(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))(x,y,z) = \nabla(2f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xy \\ 2(x^2+z) \\ 2y \end{pmatrix}.$$

- $\operatorname{div}(\nabla(f))$: Es gilt

$$\nabla(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+z \\ y \end{pmatrix}$$

und damit folgt

$$\operatorname{div}(\nabla(f))(x,y,z) = 2y + 0 + 0 = 2y.$$

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$: Da $\vec{v}$ zweimal stetig differenzierbar ist folgt unmittelbar

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))(x,y,z) = 0.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Sei $\vec{\gamma}_1$ der Viertelkreis um den Ursprung mit Startpunkt $(0,0,2)^T$ und Endpunkt $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)^T$ und sei

$$\vec{\gamma}_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei das Vektorfeld $\vec{v}$ gegeben durch

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix}2xy\\x^2+z\\y\end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie anschließend ein solches.

(ii) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{v}$ entlang $\vec{\gamma}_1$ und entlang $\vec{\gamma}_2$.

(i) **(5 Punkte)** Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der $\mathbb{R}^3$, dieser ist offen und konvex. Weiter gilt

$$\operatorname{rot}(\vec{v})(x,y,z) = \begin{pmatrix}1-1\\0-0\\2x-2x\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Damit ist die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials erfüllt. Sei nun $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein solches Potential. Dann gilt

$$\nabla(u)(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial u}{\partial z}\end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix}-2xy\\-x^2-z\\-y\end{pmatrix} = -\vec{v}(x,y,z).$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir durch Integration nach x

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = -2xy \\ \Rightarrow \qquad & u(x,y,z) = -x^2y + c_1(y,z) \end{aligned}$$

für eine Funktion $c_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dies setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = -x^2 + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -x^2 - z \\ \Rightarrow \qquad & c_1(y,z) = -yz + c_2(z) \end{aligned}$$

für ein $c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, insgesamt also

$$u(x,y,z) = -x^2y + c_1(y,z) = -x^2y - yz + c_2(z).$$

Dies setzen wir wiederum in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -y + \frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = -y \\ \Rightarrow \qquad & c_2(z) = c \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ konstant. Ein Potential von $\vec{v}$ ist also gegeben durch (für $c = 0$)

$$u(x,y,z) = -x^2y - yz.$$

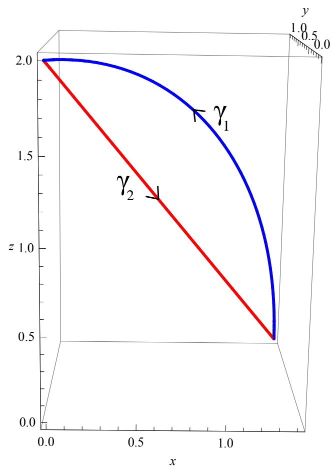

Abbildung 1: Skizze der Kurven γ_1 und γ_2.

(ii) **(4 Punkte)**
Mit Hilfe des Potentials u aus dem ersten Aufgabenteil ist das Kurvenintegral von $\vec{v}$ entlang γ_1 gegeben durch

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = u(0,0,2) - u(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 0 - (-(\sqrt{2})^3) = 2\sqrt{2}.$$

Die zweite Kurve γ_2 verläuft zwischen demselben Anfangs- und Endpunkt, allerdings in umgekehrter Reihenfolge, wie wir an der Skizze erkennen können. Somit gilt

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -2\sqrt{2}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Rotationskörper $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z,\ z \in [0,3]\right\}$ sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y^2 \\ xz^2 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Menge K.

(ii) Beschreiben Sie die Menge K in Zylinderkoordinaten.

(iii) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals $\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O}$.

(i) **(2 Punkte)**
Der Rotationskörper K beschreibt einen Kegel mit Spitze im Nullpunkt und der Kreisscheibe mit Radius 3 parallel zur $x-y$ Ebene mit Mittelpunkt $(0,0,3)$ als Grundfläche.

(ii) **(2 Punkte)** In Zylinderkoordinaten können wir K unter anderem beschreiben mit

$$K = \left\{(r\cos\varphi, \sin\varphi, h) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,3],\ \varphi \in [0,2\pi],\ r \leq h \leq 3\right\}.$$

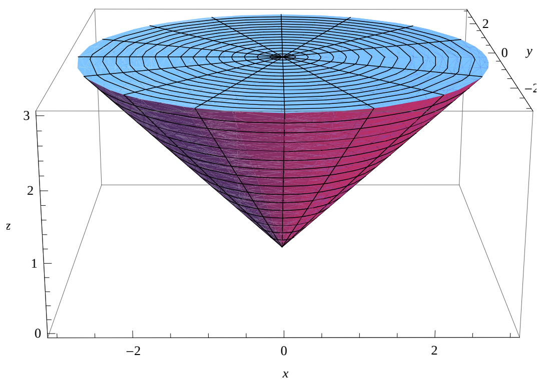

Abbildung 2: Skizze des Rotationskörpers K.

(iii) **(6 Punkte)** Es gilt $\operatorname{div}(\vec{v})(x,y,z) = 1$. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{v}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Wir berechnen also das Volumen des Kegels der Höhe 3 mit einer Grundfläche von Radius 3. Nach der elementaren Volumenformel gilt dann

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3^2 = 9\pi.$$

Alternativ erhalten wir mit der Transformationsformel (und dem Volumenelement $\mathrm{d}\vec{V} = r \, \mathrm{d}h\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ der Zylinderkoordinaten)

$$\begin{aligned}\iiint_K 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 r \, \mathrm{d}h\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3r - r^2 \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^3 3r - r^2 \, \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=3} = 2\pi\left(\frac{27}{2} - 9\right) \\ &= 9\pi.\end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto -x^2 + \tfrac{1}{12}y^3 + 2yz - 2z^2.$$

Berechnen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion f.

Es ist

$$\nabla(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ \frac{1}{4}y^2 + 2z \\ 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

Damit $\nabla(f)(x,y,z) = \vec{0}$ gilt, muss also $x = 0$ und $y = 2z$ (aus Gleichung 3) gelten. In Gleichung 2 eingesetzt erhalten wir $0 = z^2 + 2z$ und somit $z = 0$ bzw. $z = -2$. Die kritischen Punkte sind also

$$\vec{x}_1 = (0,0,0), \qquad \vec{x}_2 = (0,-4,-2).$$

Weiter ist

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}y & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen diese Matrix auf Definitheit in den kritischen Punkten mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums. Es ist

$$f''(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptminoren sind

$$\det(-2) = -2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \det\left(f''(0,0,0)\right) = -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8.$$

Das heißt $f''(0,0,0)$ ist indefinit . Somit liegt in $(0,0,0)$ ein Sattelpunkt vor . Weiter ist

$$f''(0,-4,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptminoren sind

$$\det(-2) = -2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4, \quad \det\left(f''(0,-4,-2)\right) = -2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -8.$$

Somit ist $f''(0,-4,-2)$ negativ definit und in $(0,-4,-2)$ liegt ein lokales Maximum vor .

5. Aufgabe

11 Punkte

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Rotationsfläche, welche entsteht, wenn die Funktion $z = 2/x$ mit $x \in [1,3]$ um die $z-$Achse rotiert.

(i) Skizzieren Sie die Menge M.

(ii) Geben Sie eine Parametrisierung der Menge M an.

(iii) Bestimmen Sie eine Normale an M im Punkt $(2,0,1)$ und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.
Hinweis: Eine Normale steht senkrecht auf der Fläche.

(iv) Bestimmen Sie die Randkurven von M und parametrisieren Sie diese.
Hinweis: Hierbei dürfen Sie die Orientierung vernachlässigen.

(i) **(2+1 Punkte)**

(ii) **(2 Punkte)** Da die Menge M eine Rotationsfläche ist, ist eine Parametrisierung z.B. gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{2}{r} \end{pmatrix}, \qquad r \in [1,3],\ \varphi \in [0,2\pi].$$

(iii) **(3 Punkte)** Eine Normale ergibt sich mit Hilfe des Kreuzproduktes der partiellen Ableitungen von Φ, es gilt

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{2}{r^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r}\cos\varphi \\ \frac{2}{r}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

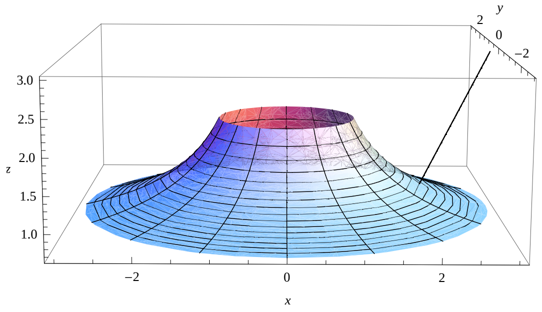

Abbildung 3: Skizze der Rotationsfläche M und der Normalen aus Aufgabenteil (iii).

Der Punkt $(2,0,1)$ ist das Bild des Punktes $(2,0)$ unter Φ, d.h. es ist $\Phi(2,0)=(2,0,1)$. Und damit gilt für die Normale im Punkt $(2,0,1)$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)(2,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(iv) **(3 Punkte)** Die Randkurven von M sind die beiden Kreise parallel zur $x-y$ Ebene in der Höhe $\frac{2}{3}$

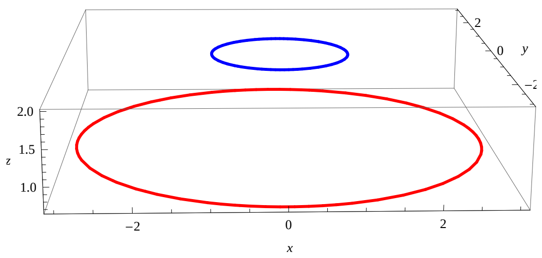

Abbildung 4: Skizze der beiden Randkurven von M.

bzw. 2 mit den Radien 3 bzw. 1. Parametrisierungen sind somit gegeben durch

$$\gamma_1(t)=\begin{pmatrix}3\cos t\\3\sin t\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi],$$
$$\gamma_2(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\2\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi].$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^3$ eine gegen $\vec{0}$ konvergente Folge und sei

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\qquad(x,y,z)\mapsto e^{y\cdot\sin(x)}+\cos(z).$$

Dann konvergiert die Folge $(f(\vec{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ gegen 0.

(ii) Sei $Q = [0,1]^3$ und sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten f_1, f_2 und f_3 stetig differenzierbar. Dann nimmt die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto f_1(x,y,z) \cdot (f_2(x,y,z) + f_3(x,y,z))$$

auf Q ihr globales Minimum an.

(iii) Seien $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(1)$. Dann folgt

$$\int_{\vec{\gamma}} \nabla(f) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

(i) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch! Wähle z.B. die konstante Folge $(\vec{x}_n) = (\vec{0})$. Dann ist $f(\vec{x}_n) = 2$ für alle n und somit gilt auch für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = 2 \neq 0.$$

(ii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist wahr! Die Funktion g ist als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig und Q ist eine kompakte Menge. Somit nimmt g auf Q ihre globalen Extremwerte (insbesondere ihr Minimum) an.

(iii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist wahr! Da $-f$ ein Potential von $\nabla(f)$ ist folgt mit $\gamma(0) = \gamma(1)$

$$\int_{\vec{\gamma}} \nabla(f) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -f(\gamma(0)) - (-f(\gamma(1))) = -f(\gamma(0)) - (-f(\gamma(0))) = 0.$$

---

7. Aufgabe

5 Punkte

Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{(x-1)^k}{k}.$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz an den Rändern des Konvergenzbereiches und geben Sie den Konvergenzbereich an.

(i) **(2 Punkte)** Es gilt für den Konvergenzradius

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-\frac{1}{3})^k \cdot \frac{1}{k}}{(-\frac{1}{3})^{k+1} \cdot \frac{1}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1} \cdot \frac{(-3)^{k+1}}{(-3)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1} \cdot (-3)\right|$$
$$= 3.$$

(ii) **(3 Punkte)** Die Randpunkte des Konvergenzbereichs sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$. Für $x_1 = 4$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{3^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Dies ist die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert . Für $x_2 = -2$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{(-3)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Dies ist die harmonische Reihe, welche divergiert . Somit ergibt sich das Konvergenzintervall

$$I =]-2, 4].$$