Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14

P. Bank, A. Gündel-vom-Hofe, G. Penn-Karras 09.04.2014

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Es seien

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + 3xy^2 + y \\ 3x^2y + y^3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$ und $\vec{g}$.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\vec{f} \circ \vec{g}$ im Punkt 0.

2. Aufgabe

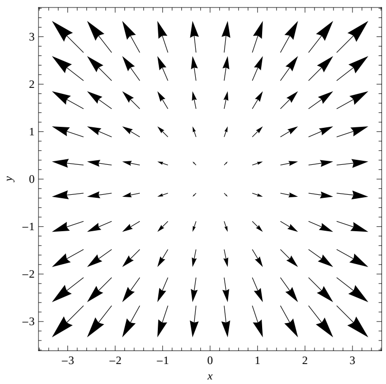
9 Punkte

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

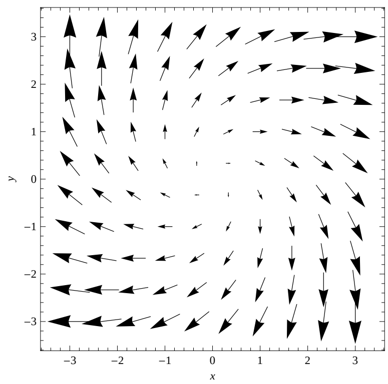
$$\vec{v}_1(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

(i) Seien $\vec{w}_i(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{v}_i(x,y) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $i = 1,2,3$. Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation der Vektorfelder $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ und $\vec{w}_3$.

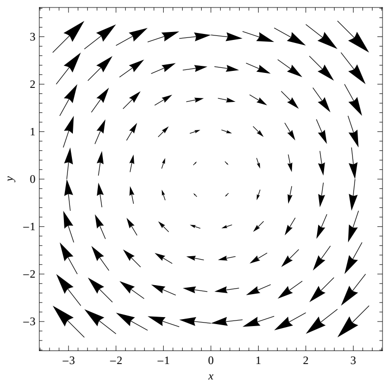
(ii) Ordnen Sie den Vektorfeldern $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ die entsprechende Skizze zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.



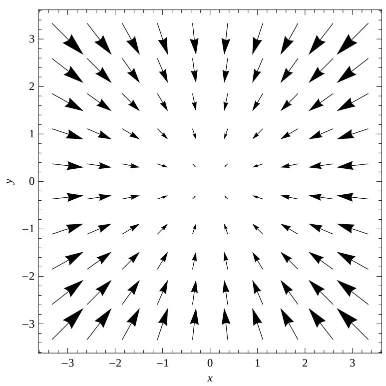
$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



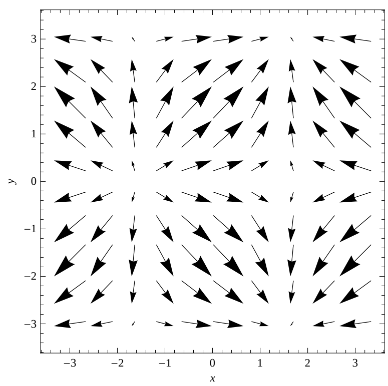
$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



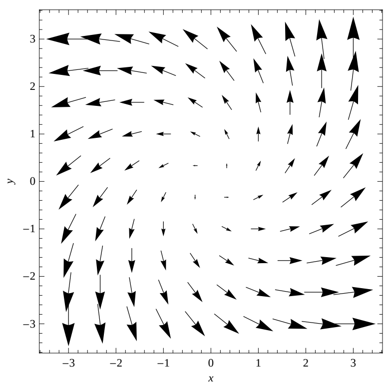
$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$

3. Aufgabe

18 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x,$$

und die Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

(ii) Bestimmen Sie die Art und Lage aller lokalen Extremstellen von f im Innern von D.

(iii) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf D.

(iv) Parametrisieren Sie den Graphen von f.

(v) Geben Sie einen Normalenvektor an den Graphen von f im Punkt $(1,1,2)$ an.

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

(i) Skizzieren Sie die beiden Mengen A und B.

(ii) Geben Sie in der nachfolgenden Tabelle an, welche topologischen Eigenschaften (beschränkt, offen, abgeschlossen, kompakt) die Mengen A und B besitzen. Kennzeichen sie dieses durch ein $+$, falls die Eigenschaft vorliegt und durch ein $-$, falls dies nicht der Fall ist.

	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
A				
B				

(iii) Gegeben sei das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 6xy(x-y).$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_A f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(iv) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xz + zy^2 \\ ze^x \\ 4yx \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O}.$$

5. Aufgabe

6 Punkte

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Hessematrix

$$f''(1,2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left(= \mathrm{Hess}_{(1,2,3)} f\right).$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 4\sin(t) \end{pmatrix},$$

die Niveaulinie von f zum Wert 2. Dann gilt

$$\int_\gamma f \; \mathrm{d}s = 2.$$

(iii) Sei F die geschlossene Fläche $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 5\}$ und $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Vektorpotential $\vec{w}$. Dann ist das Flussintegral von $\vec{v}$ über F null.

6. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) f ist im Punkt $(0,1)$ unstetig.

(ii) f ist im Nullpunkt unstetig.

(iii) f hat auf $\mathbb{R}^2$ ein globales Maximum, jedoch kein globales Minimum.