Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14

P. Bank, A. Gündel-vom-Hofe, G. Penn-Karras 09.04.2014

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

6 Punkte

Es seien

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3+3xy^2+y \\ 3x^2y+y^3 \end{pmatrix},$$
$$\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$ und $\vec{g}$.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\vec{f} \circ \vec{g}$ im Punkt 0.

(i) **(2 Punkte)** Es gilt

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+3y^2 & 6xy+1 \\ 6xy & 3x^2+3y^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(ii) **(4 Punkte)** Mit der Kettenregel gilt $(\vec{f} \circ \vec{g})'(t) = \vec{f}'(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)$. Es ist $\vec{g}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Nutzen wir die Lösungen aus dem ersten Teil erhalten wir

$$\vec{f}'(\vec{g}(0)) = \vec{f}'(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

---

2. Aufgabe

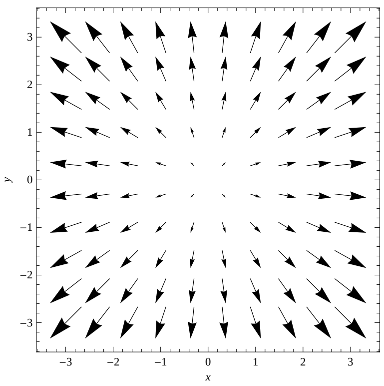
9 Punkte

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

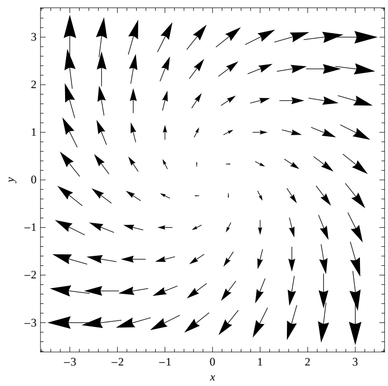
$$\vec{v}_1(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

(i) Seien $\vec{w}_i(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{v}_i(x,y) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $i = 1,2,3$. Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation der Vektorfelder $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ und $\vec{w}_3$.

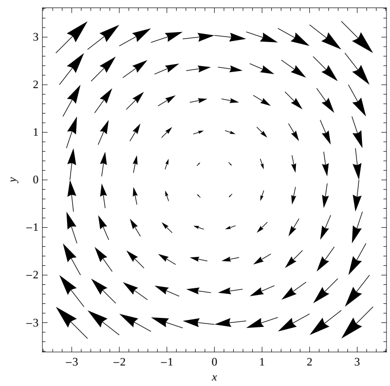
(ii) Ordnen Sie den Vektorfeldern $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ die entsprechende Skizze zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.



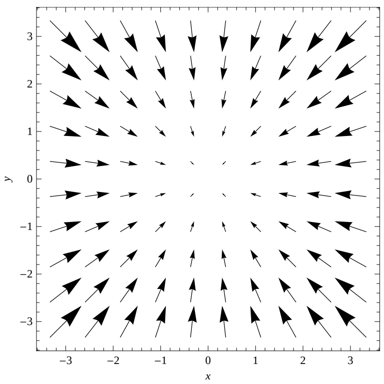
$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$



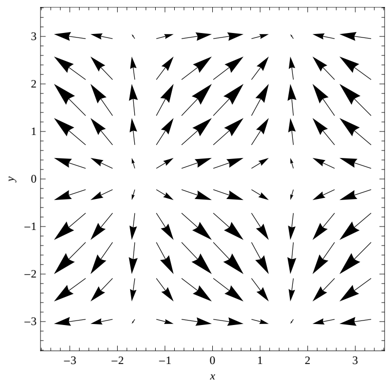
$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$



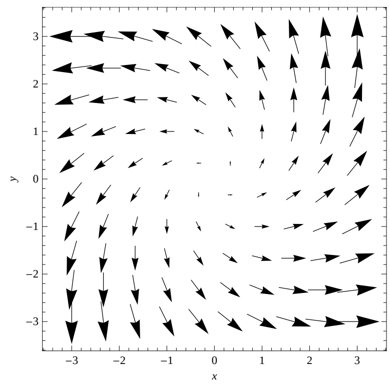
$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$



$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$



$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$



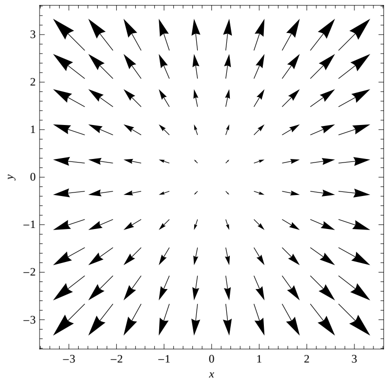
$\vec{v}_1: \square,\ \vec{v}_2: \square,\ \vec{v}_3: \square$

(i) **(3 Punkte)** Für die Divergenzen und Rotationen erhalten wir

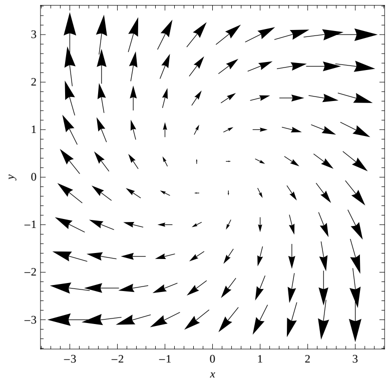
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{w}_1)(x,y,z) &= 0, & \operatorname{rot}(\vec{w}_1)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\operatorname{div}(\vec{w}_2)(x,y,z) &= 1+1 = 2, & \operatorname{rot}(\vec{w}_2)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\underbrace{\operatorname{div}(\vec{w}_3)(x,y,z) = 1+1 = 2,}_{} & & \underbrace{\operatorname{rot}(\vec{w}_3)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{}&.
\end{aligned}$$

Hinweis: Wegen $\vec{w}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ können die jeweiligen Ergebnisse für $\vec{w}_3$ aus denen für $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ abgelesen werden.

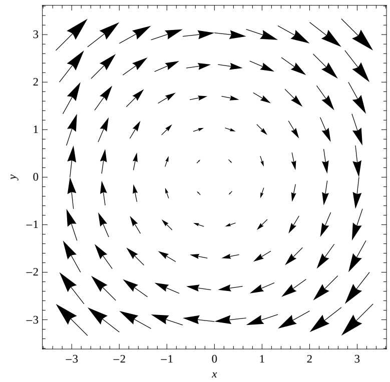
(ii) **(6 Punkte)**



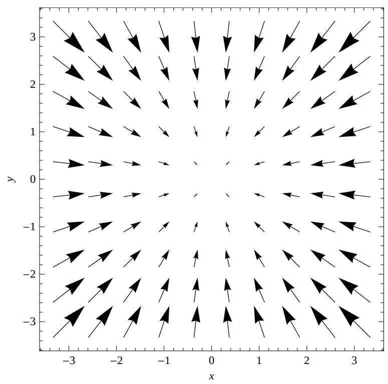
$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \blacksquare\ ,\ \vec{v}_3 : \square$



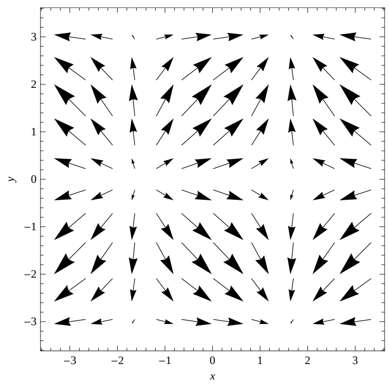
$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \blacksquare$



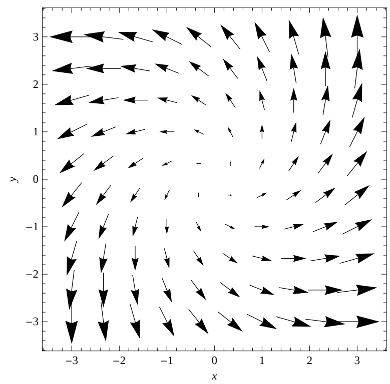
$\vec{v}_1 : \blacksquare\ ,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$



$\vec{v}_1 : \square,\ \vec{v}_2 : \square,\ \vec{v}_3 : \square$

3. Aufgabe

18 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x,$$

und die Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

(ii) Bestimmen Sie die Art und Lage aller lokalen Extremstellen von f im Innern von D.

(iii) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf D.

(iv) Parametrisieren Sie den Graphen von f.

(v) Geben Sie einen Normalenvektor an den Graphen von f im Punkt $(1, 1, 2)$ an.

(i) **(2 Punkte)** Die Funktion f ist selbst ein Polynom zweiten Grades, somit stimmt das Taylorpolynom zweiten Grades Tf von f mit f überein, es gilt also $Tf(x, y) = f(x, y)$.

(ii) **(3 Punkte)** Wir bestimmen zunächst den Gradienten von f, es gilt

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Das notwendige Kriterium $(\nabla f)(x, y) = \vec{0}$ für die Existenz einer Extremstelle ist somit nur für den Punkt $\vec{x}_0 = (\frac{1}{2}, 0)$ erfüllt. Da außerdem die Hessematrix

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist und nur positive Einträge auf der Diagonalen besitzt, ist sie positiv definit. In $\vec{x}_0$ liegt folglich ein lokales Minimum vor mit dem Funktionswert $f(\vec{x}_0) = -1/4$.

(iii) **(9 Punkte)** Die Existenz globaler Extremwerte von f auf D ist sicher, da f stetig und D eine kompakte Menge ist. Wir haben im zweiten Teil bereits das Innere von D nach möglichen Extremstellen untersucht. Es bleibt eine Randuntersuchung durchzuführen. Auf dem Rand gilt die Nebenbedinung $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Singuläre Punkte:

$$\begin{cases} \nabla h = 0, \\ h = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen werden nur durch $x = y = 0$ gelöst, dies führt aber zu einem Widerspruch in der dritten Gleichung. Folglich existieren keine singulären Punkte.

Lagrange-Methode:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla h(x, y), \\ h(x, y) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \lambda 2x, \\ 4y = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $(4 - 2\lambda)y = 0$. Diese Gleichung wird gelöst für $\lambda = 2$ oder $y = 0$.

$\underline{\lambda = 2:}$ Setzen wir $\lambda = 2$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir $x = -1/2$. Die dritte Gleichung liefert dann $y^2 = 3/4$. Zwei mögliche Extremstellen sind also

$$\vec{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \vec{x}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$\underline{y = 0:}$ Hier erhalten wir in der dritten Gleichung $x^2 = 1$. Da wir λ frei wählen können, wird auch die erste Gleichung gelöst. Weitere mögliche Extremstellen nach Lagrange sind somit

$$\vec{x}_3 = (1, 0), \qquad \vec{x}_4 = (-1, 0).$$

Schließlich finden wir die globalen Extrema der Funktion, indem wir die Funktionswerte in den ermittelten Punkten vergleichen. Es ist

$$\begin{array}{ll} f(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4}, & f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \frac{9}{4}, \\ f(\vec{x}_3) = 0, & f(\vec{x}_4) = 2. \end{array}$$

Das heißt, dass das globale Maximum in $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und das globale Minimum in $\vec{x}_0$ vorliegt.

(iv) **(2 Punkte)** Eine Parametrisierung des Graphen von f ist gegeben durch

$$\vec{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + 2y^2 - x \end{pmatrix}.$$

(v) **(2 Punkte)** Zur Berechnung eines Normalenvektors nutzen wir die eben aufgestellte Parametrisierung und berechnen das Kreuzprodukt ihrer partiellen Ableitungen, welches stets senkrecht auf dem Graphen von f steht. Wir erhalten den Vektor

$$\vec{n}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x \\ 0 - 4y \\ 1 - 0 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(1, 1)$ (wegen $F(1, 1) = (1, 1, 2)$) ergibt sich

$$\vec{n}(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y, \ 0 \le y \le 1\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2, \ 0 \le z \le 1\}.$$

(i) Skizzieren Sie die beiden Mengen A und B.

(ii) Geben Sie in der nachfolgenden Tabelle an, welche topologischen Eigenschaften (beschränkt, offen, abgeschlossen, kompakt) die Mengen A und B besitzen. Kennzeichen sie dieses durch ein $+$, falls die Eigenschaft vorliegt und durch ein $-$, falls dies nicht der Fall ist.

	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
A				
B				

(iii) Gegeben sei das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 6xy(x-y).$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_A f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(iv) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xz + zy^2 \\ ze^x \\ 4yx \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O}.$$

(i) **(4 Punkte)**

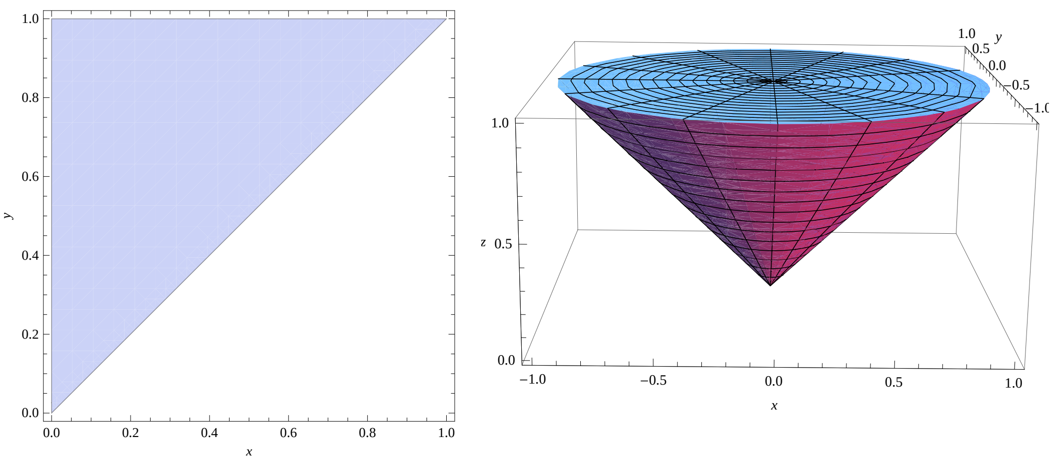


Abbildung 1: Skizze der Menge A (links) und der Menge B (rechts).

(ii) **(2 Punkte)** Beide Mengen sind kompakt, also abgeschlossen, beschränkt und nicht offen.

	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
A	-	+	+	+
B	-	+	+	+

(iii) **(3 Punkte)** Mit den Grenzen $0 \le y \le 1$ und $0 \le x \le y$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_A f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 6xy(x-y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[2x^3y - 3x^2y^2\right]_{x=0}^{x=y}\ \mathrm{d}y = \int_0^1 2y^4 - 3y^4\ \mathrm{d}y \\ &= \left[-\frac{y^5}{5}\right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

(iv) **(5 Punkte)** Mit dem Satz von Gauß gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{d}O} = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v}) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Den Kegel B beschreiben wir in Zylinderkoordinaten mit

$$B = \left\{(r\cos(\varphi), \sin(\varphi), h) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,1],\ \ \varphi \in [0, 2\pi],\ \ r \leq h \leq 1\right\},$$

die Divergenz von $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$\operatorname{div}(\vec{v})(x, y, z) = z.$$

Mit dem Volumenelement $\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}h\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ der Zylinderkoordinaten und $\operatorname{div}(\vec{v})(r\cos(\varphi), \sin(\varphi), h) = h$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{d}O} &= \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v}) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_r^1 \int_0^{2\pi} hr \ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}h\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_r^1 hr \ \mathrm{d}h\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{rh^2}{2}\right]_{h=r}^{h=1} \mathrm{d}r = \pi \int_0^1 r - r^3 \ \mathrm{d}r \\
&= \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe
6 Punkte

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Hessematrix

$$f''(1,2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left(= \operatorname{Hess}_{(1,2,3)} f\right).$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 4\sin(t) \end{pmatrix},$$

die Niveaulinie von f zum Wert 2. Dann gilt

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = 2.$$

(iii) Sei F die geschlossene Fläche $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 5\}$ und $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Vektorpotential $\vec{w}$. Dann ist das Flussintegral von $\vec{v}$ über F null.

(i) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch! Mit dem Satz von Schwarz ist die Hessematrix einer zweimal stetig differenzierbaren Abbildung symmetrisch. Da die angegebene Matrix allerdings nicht symmetrisch ist, kann keine solche Funktion f existieren.

(ii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch! Es gilt nämlich

$$\int_y f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Da γ die Niveaulinie von f zum Wert 2 ist gilt $f(\gamma(t)) = 2$, weiterhin ist $|\gamma'(t)| = 4$. Damit folgt

$$\int_y f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 2 \cdot 4 \, \mathrm{d}t = 8 \neq 2.$$

(iii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist wahr! Dies können wir sowohl mit dem Satz von Gauß, als auch mit dem Satz von Stokes einsehen.
<u>Mit Stokes:</u> Da die Menge F geschlossen ist hat F keine Randkurven. Mit dem Satz von Stokes gilt daher

$$\iint_F \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iint_F \operatorname{rot}(\vec{w}) \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \int_\emptyset \vec{w} \cdot \vec{\mathrm{d}s} = 0.$$

<u>Mit Gauß:</u> Die Menge F ist genau der Rand des Ellipsoiden $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 5\}$. Da $\vec{v}$ ein Vektorpotential besitzt gilt notwendigerweise $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, mit dem Satz von Gauß folgt

$$\iint_F \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iint_{\partial E} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{v}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

---

6. Aufgabe
7 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) f ist im Punkt $(0,1)$ unstetig.

(ii) f ist im Nullpunkt unstetig.

(iii) f hat auf $\mathbb{R}^2$ ein globales Maximum, jedoch kein globales Minimum.

(i) **(2 Punkte)** Die Folge $\vec{a}_k = (\frac{1}{k}, 1)$ konvergiert gegen den Punkt $(0,1)$. Da der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{a}_k) = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} 1 - k^2 = -\infty$$

nicht existiert und somit ungleich $f(0,1) = 1$ ist, ist f im Punkt $(0,1)$ unstetig.

(ii) **(2 Punkte)** Die Folge $\vec{b}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ konvergiert gegen den Nullpunkt, wir erhalten weiterhin

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{b}_k) = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = 0 \neq 1 = f(0,0).$$

Damit ist die Funktion f auch im Nullpunkt unstetig.

(iii) **(3 Punkte)** Im ersten Aufgabenteil haben wir bereits gesehen, dass die Funktion f kein globales Minimum besitzt, da die Funktion entlang der dort angegebenen Folge $\vec{a}_k$ gegen unendlich strebt. Aus der Definition von f wird mit $x \neq 0$ ersichtlich

$$f(x,y) = 1 - \underbrace{\frac{y^2}{x^2}}_{\geq 0} \leq 1.$$

Damit ist 1 das globale Maximum von f, welches in allen Punkten der Form $(0,y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ angenommen wird.