Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 14
C. Mehl, G. Penn-Karras 30.07.2014

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Aufgabe

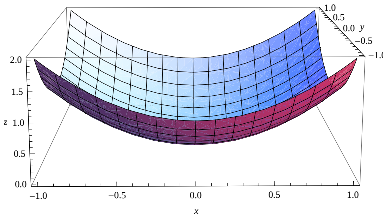
6 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen

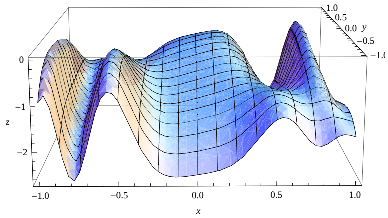
$$f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$g\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 - y^2,$$
$$h\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = \sin(2\pi x).$$

Ordnen Sie den Abbildungen f, g und h die entsprechende Skizze des Graphen zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.

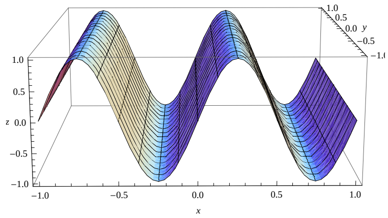
Hinweis: Zu jeder Abbildung gehört genau eine Skizze. In den Skizzen verläuft die x-Achse von links nach rechts, die z-Achse von unten nach oben und die y-Achse in das Bild hinein, also von vorne nach hinten.



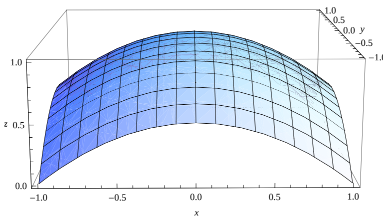
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



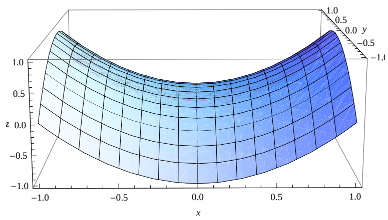
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



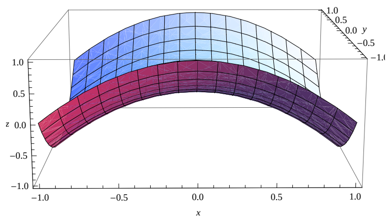
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + x^3.$$

(a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extremwerte von f.

(b) Besitzt die Funktion globale Extrema? Wenn ja, geben Sie die Punkte an, in denen diese angenommen werden.

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1,0)$ an.

3. Aufgabe

10 Punkte

Das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$f(x,y,z) = (x - y^2) + 4z(y - x^2), \qquad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z \\ 2yz \\ y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Weiter sei die Kurve γ gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}_\gamma \colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t - 1 \\ \sin^2(t) \\ \cos(t/2)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div}(\vec{x}_\gamma), \quad \operatorname{rot}(\vec{v}), \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}(f \cdot \vec{v}), \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}).$$

(b) Bestimmen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential besitzt. Bestimmen Sie anschließend gegebenenfalls ein solches.

(c) Bestimmen Sie das Kurvenintegral von $\vec{v}$ entlang der Kurve γ.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Menge

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -z \le x \le z, \; -z \le y \le z, \; 0 \le z \le 1\},$$

sowie das Skalarfeld

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = 4xy + 4xyz + 2$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + zy^2 \\ y^2xz \\ z - xy + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Menge P beschrieben?
Hinweis: Überlegen Sie sich für feste Werte von z (z.B. für $z = 0$, $z = 1$ und $z = 1/2$) die Bereiche für x und y.

(b) Geben Sie ohne Begründung an, welche der topologischen Eigenschaften offen, abgeschlossen, beschränkt und kompakt die Menge P besitzt und welche nicht.
Hinweis: Kennzeichnen Sie insbesondere auch, welche der Eigenschaften die Menge P nicht besitzt!

(c) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\iiint_P f(x,y,z)\; dxdydz.$$

(d) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\iint_{\partial P} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der folgenden Kurven und Flächen an.

(a) Sei A der Graph der Abbildung

$$f \colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2.$$

(b) Sei M die Rotationsfläche, welche entsteht wenn $z = x$ mit $0 \le x \le 1$ um die z-Achse rotiert.

(c) Sei γ die Randkurve der Fläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = |x| \cdot y.$$

Dann ist f im Punkt $(0,1)$ stetig, aber nicht differenzierbar.

(b) Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Potential $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und Vektorpotential $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Dann verschwindet das Flussintegral von $\vec{v}$ durch den Rand des Würfels $Q = [0,1]^3$, es gilt also

$$\iint_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0.$$

(c) Seien $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potentialfeld und γ eine Kurve mit Parametrisierung $\vec{x}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ so, dass $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ gilt. Dann ist γ eine geschlossene Kurve, d.h. es gilt $\vec{x}(0) = \vec{x}(1)$.

(d) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4\}$ und die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und nicht konstant auf A. Dann gibt das Lagrange-Verfahren mindestens zwei Kandidaten für Extremstellen von h auf A.

7. Aufgabe

6 Punkte

In einem Modellversuch wird die vertikale Beschleunigung a eines Körpers ermittelt. Das gemessene Gewicht des Körpers beträgt $m_0 = 50,5\ kg$ und die gemessene vertikale Kraft, die auf ihn wirkt, beträgt $F_0 = 2525\ N$. Es gilt $a(F,m) = F/m$.

Hinweis: Es gilt $1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$. In Ihren Rechnungen dürfen Sie aber auf die Einheiten verzichten.

(a) Berechnen Sie die aus den Messwerten resultierende Beschleunigung $a_0 = a(F_0, m_0)$.

(b) Es wird eine Messtoleranz von $\pm\ 25\ N$ bzw. $\pm\ 0,5\ kg$ angenommen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes die größtmögliche vertikale Beschleunigung, die auf den Körper wirken kann.