

**Juli – Klausur**  
**Analysis II für Ingenieure**  
**Lösungsskizze**

**1. Aufgabe**

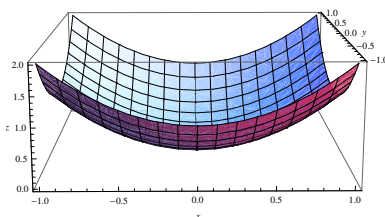
6 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen

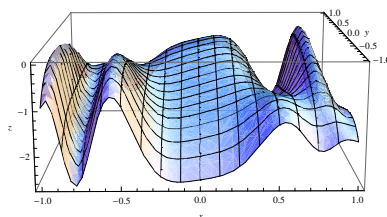
$$\begin{aligned} f: [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &= x^2 + y^2, \\ g: [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= x^2 - y^2, \\ h: [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x, y) &= \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Ordnen Sie den Abbildungen  $f$ ,  $g$  und  $h$  die entsprechende Skizze des Graphen zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.

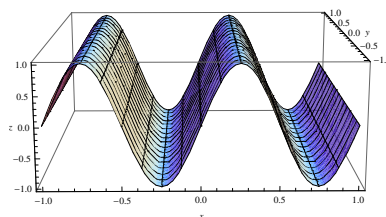
*Hinweis:* Zu jeder Abbildung gehört genau eine Skizze. In den Skizzen verläuft die  $x$ -Achse von links nach rechts, die  $z$ -Achse von unten nach oben und die  $y$ -Achse in das Bild hinein, also von vorne nach hinten.



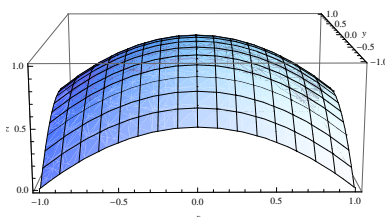
$f: \square, g: \square, h: \square$



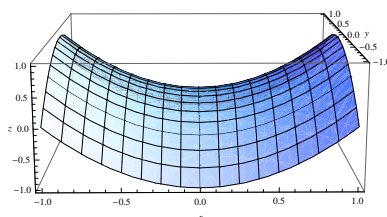
$f: \square, g: \square, h: \square$



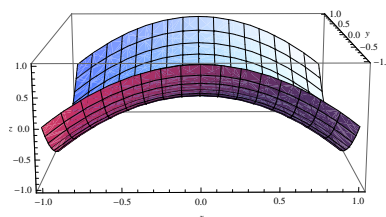
$f: \square, g: \square, h: \square$



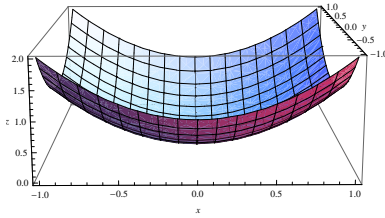
$f: \square, g: \square, h: \square$



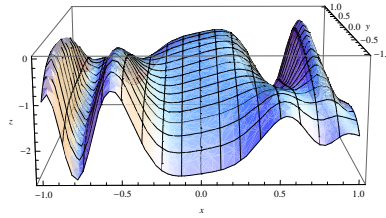
$f: \square, g: \square, h: \square$



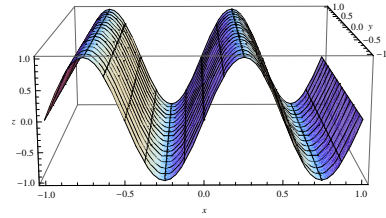
$f: \square, g: \square, h: \square$



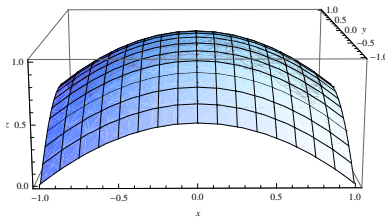
$f: \boxtimes, g: \square, h: \square$



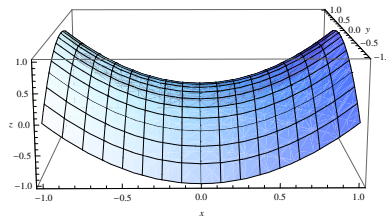
$f: \square, g: \square, h: \square$



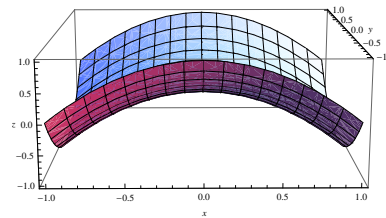
$f: \square, g: \square, h: \boxtimes$



$f: \square, g: \square, h: \square$



$f: \square, g: \boxtimes, h: \square$



$f: \square, g: \square, h: \square$

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + x^3.$$

- (a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extremwerte von  $f$ .
- (b) Besitzt die Funktion globale Extrema? Wenn ja, geben Sie die Punkte an, in denen diese angenommen werden.
- (c) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades von  $f$  mit dem Entwicklungspunkt  $\vec{x}_0 = (1, 0)$  an.

- (a) **(6 Punkte)** Da die Funktion in jeder Variablen ein Polynom ist, existieren die partiellen Ableitungen und wir können das notwendige Kriterium  $\text{grad}_{(x,y)} f = \vec{0}$  für ein Extremum überprüfen:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{(x,y)} f &= \begin{pmatrix} 2x + 3y + 3x^2 \\ 2y + 3x \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0, & \text{oder} \\ x = \frac{5}{6} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind also

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/4 \end{pmatrix}.$$

Nun bleibt zu überprüfen, ob es sich hierbei um Extrema handelt. Hierzu bestimmen wir die Hesse-Matrix und werten sie an den kritischen Punkten aus. Da die Funktion ein Polynom ist, existieren auch alle Mehrfachableitungen. Die Hesse-Matrix lautet

$$H_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2 + 6x & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt  $\vec{x}_1$  ergibt sich damit

$$H_{\vec{x}_1} f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da es sich um eine 2x2-Matrix handelt und  $\det(H_{\vec{x}_1} f) = 2^2 - 3^2 = -5 < 0$  ist, besitzt diese Matrix einen positiven und einen negativen Eigenwert und ist indefinit. Damit handelt es sich bei  $\vec{x}_1$  um einen Sattelpunkt.

Andererseits erhalten wir im kritischen Punkt  $\vec{x}_2$

$$H_{\vec{x}_2} f = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier gilt  $\det(H_{\vec{x}_2} f) = 14 - 9 = 5 > 0$  und da der Eintrag 7 in der linken oberen Ecke positiv ist, ist die Matrix positiv definit, d.h. in  $\vec{x}_2$  liegt ein lokales Minimum vor.

- (b) **(2 Punkte)** Da der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$  keine Randpunkte hat, müssen globale Extrema mit lokalen Extrempunkten übereinstimmen. Somit gibt es kein globales Maximum, da es kein lokales Maximum gibt. Andererseits gibt es auch kein globales Minimum, da z.B. für  $f(-x, -x) = 5x^2 - x^3$  gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x, -x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x^2}_{\rightarrow \infty} \underbrace{(5-x)}_{\rightarrow -\infty} = -\infty.$$

(c) **(2 Punkte) Version 1:** Wir können unsere vorangegangenen Ergebnisse nutzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_f(x, y) &= f(1, 0) + (x - 1, y - 0) \operatorname{grad}_{(1,0)} f + \frac{1}{2}(x - 1, y - 0) \mathbf{H}_f(1, 0) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 + (x - 1, y) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x - 1, y) \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2 + 5(x - 1) + 3y + 4(x - 1)^2 + 3y(x - 1) + y^2 \\ &= 4x^2 + y^2 + 3xy - 3x + 1. \end{aligned}$$

**Version 2:** Für ein Polynom 2. Grades ist das Taylorpolynom 2. Grades das Polynom selbst, daher gilt

$$T_{x^2+y^2+3xy}(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy.$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(x,y)}(x^3) &= \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad}_{(1,0)}(x^3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_{x^3}((x, y)) &= \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{x^3}((1, 0)) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_{x^3}(x, y) &= 1^3 + (x - 1, y - 0) \operatorname{grad}_{(1,0)}(x^3) + \frac{1}{2}(x - 1, y - 0) \mathbf{H}_{x^3}(1, 0) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + (x - 1, y) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x - 1, y) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 3(x - 1) + \frac{1}{2}6(x - 1)^2 \\ &= 3x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Da das Taylorpolynom einer Summe zweier Funktionen die Summe der jeweiligen Taylorpolynome ist, gilt somit

$$\begin{aligned} T_f((x, y)) &= T_{x^2+y^2+3xy}((x, y)) + T_{x^3}((x, y)) \\ &= x^2 + y^2 + 3xy + 3x^2 - 3x + 1 \\ &= 4x^2 + y^2 + 3xy - 3x + 1. \end{aligned}$$

### 3. Aufgabe

10 Punkte

Das Skalarfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und das Vektorfeld  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  seien gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x - y^2) + 4z(y - x^2), \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 2yz \\ y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Weiter sei die Kurve  $\gamma$  gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}_\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t - 1 \\ \sin^2(t) \\ \cos(t/2)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div}(\vec{x}_\gamma), \quad \operatorname{rot}(\vec{v}), \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad}(f \cdot \vec{v}), \quad \operatorname{div} \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}).$$

- (b) Bestimmen Sie, ob das Vektorfeld  $\vec{v}$  ein Potential besitzt. Bestimmen Sie anschließend gegebenenfalls ein solches.
- (c) Bestimmen Sie das Kurvenintegral von  $\vec{v}$  entlang der Kurve  $\gamma$ .

(a) (5 Punkte)

- Da  $f$  eine skalare Funktion ist und als Polynom auch alle partiellen Ableitungen besitzt, existiert  $\text{grad } f$  und wir berechnen

$$\text{grad}_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 1 - 8xz \\ -2y + 4z \\ 4(y - x^2) \end{pmatrix}.$$

- $\vec{x}_\gamma$  ist kein Vektorfeld, also existiert  $\text{div}(\vec{x}_\gamma)$  nicht.
- Da  $\vec{v}$  ein Vektorfeld ist, dessen Einträge als Polynome stetig differenzierbar sind, existiert  $\text{rot } \vec{v}$  und es gilt

$$\text{rot}_{(x,y,z)} \vec{v} = \begin{pmatrix} 2y - 2y \\ -1 - (-1) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $f \cdot \vec{v}$  ist keine skalare Funktion, also existieren  $\text{grad}(f \cdot \vec{v})$  und insbesondere  $\text{rot } \text{grad}(f \cdot \vec{v})$  nicht.
- $f \cdot \vec{v}$  ist ein Vektorfeld, und als Produkt mehrfach stetig partiell diffbarer Funktionen selbst auch mehrfach stetig partiell diffbar, sodass  $\text{rot}(f \cdot \vec{v})$  existiert und auch ein Vektorfeld ist. Damit ist  $\text{div } \text{rot}(f \cdot \vec{v})$  auch definiert. Wir wissen, dass für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{w}$  gilt  $\text{div } \text{rot}(\vec{w}) = 0$ . Also haben wir

$$\text{div } \text{rot}(f \cdot \vec{v}) = 0.$$

- (b) (3 Punkte) Wir haben in a) gesehen, dass  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  gilt, womit die notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials erfüllt ist. Da der Definitionsbereich von  $\vec{v}$  (das ist  $\mathbb{R}^3$ ) offen und konvex ist, ist  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  ebenso hinreichend für die Existenz eines Potentials von  $\vec{v}$ . Also besitzt  $\vec{v}$  ein (globales) Potential.

Jetzt bestimmen wir ein solches. Gesucht ist eine Funktion  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } u = -\vec{v}$ .

Aus

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \stackrel{!}{=} z$$

folgt  $u(x, y, z) = zx + h(y, z)$ . Damit muss

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \stackrel{!}{=} -2yz$$

gelten, woraus  $h(y, z) = -y^2z + g(z)$  folgt.

Gleichfalls soll

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = x - y^2 + \frac{\partial g}{\partial z}(z) \stackrel{!}{=} -y^2 + x$$

gelten, sodass folgt  $g(z) = C, C \in \mathbb{R}$ .

Nehmen wir z.B.  $C = 0$ , dann ist

$$u(x, y, z) = xz - y^2z = z(x - y^2)$$

ein Potential von  $\vec{v}$ .

- (c) **(2 Punkte)** Da  $u$  ein Potential von  $\vec{v}$  ist, benötigen wir hierzu lediglich den Anfangs- und den Endpunkt der Kurve  $\gamma$ . Es gilt

$$\vec{x}_\gamma(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_\gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2 + 2\pi - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\pi - 1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= u(\vec{x}_\gamma(0)) - u(\vec{x}_\gamma(\pi)) = u((-1, 0, 1)) - u((-\pi^2 + 2\pi - 1, 0, 0)) \\ &= -1 - 0 = -1. \end{aligned}$$


---

#### 4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Menge

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -z \leq x \leq z, \quad -z \leq y \leq z, \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

sowie das Skalarfeld

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 4xy + 4xyz + 2$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y + zy^2 \\ y^2xz \\ z - xy + 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welches geometrische Objekt wird durch die Menge  $P$  beschrieben?  
*Hinweis:* Überlegen Sie sich für feste Werte von  $z$  (z.B. für  $z = 0$ ,  $z = 1$  und  $z = 1/2$ ) die Bereiche für  $x$  und  $y$ .
- (b) Geben Sie ohne Begründung an, welche der topologischen Eigenschaften offen, abgeschlossen, beschränkt und kompakt die Menge  $P$  besitzt und welche nicht.  
*Hinweis:* Kennzeichnen Sie insbesondere auch, welche der Eigenschaften die Menge  $P$  nicht besitzt!
- (c) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\iiint_P f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

- (d) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\iint_{\partial P} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$


---

- (a) **(2 Punkte)** Für jeden festen Wert von  $z$  ist der Bereich für  $x$  und  $y$  ein Quadrat mit Seitenlänge  $2z$  (für  $z = 0$  ist dies nur ein Punkt). Also ist  $P$  eine Pyramide mit Spitze in  $(0, 0, 0)$  und quadratischer Grundfläche, die auf der Höhe von  $z = 1$  parallel zur  $xy$ -Ebene liegt. für erkannte Quadrate, Pyramide auf dem Kopf o.ä.
- (b) **(1)**  $P$  ist abgeschlossen, beschränkt, daher kompakt und außerdem nicht offen.

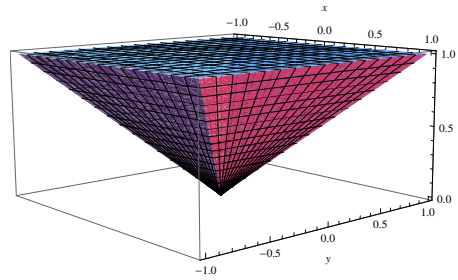


Abbildung 1: Skizze der Pyramide  $P$ .

(c) **(3 Punkte)** Es gilt

$$\begin{aligned}
 \iiint_P f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_{-z}^z \int_{-z}^z (4xy + 4xyz + 2) \, dx dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_{-z}^z [2x^2y + 2x^2yz + 2x]_{x=-z}^{x=z} \, dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_{-z}^z 4z \, dy dz \\
 &= \int_0^1 [4zy]_{y=-z}^{y=z} \, dz \\
 &= \int_0^1 8z^2 \, dz = \left[ \frac{8}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=1} \\
 &= \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

(d) **(4 Punkte)** Wir berechnen

$$\operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v} = 2xy + 2xyz + 1 = \frac{1}{2} f(x, y, z).$$

Mit dem Satz von Gauss gilt dann

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial P} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint_P \operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v} \, dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_P f(x, y, z) \, dx dy dz \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

## 5. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der folgenden Kurven und Flächen an.

(a) Sei  $A$  der Graph der Abbildung

$$f: [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2.$$

- (b) Sei  $M$  die Rotationsfläche, welche entsteht wenn  $z = x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  um die  $z$ -Achse rotiert.  
 (c) Sei  $\gamma$  die Randkurve der Fläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi \right\}.$$


---

- (a) **(2 Punkte)** Eine Parametrisierung von  $A$  ist gegeben durch

$$\vec{x}_A: \underbrace{[-1, 1]^2}_{\text{Domain}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}_A(x, y) = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}}_{\text{Image}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

- (b) **(3 Punkte)** In Zylinderkoordinaten ist  $M$  gegeben durch

$$M_{\text{Zyl}} = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \mid \rho \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], \rho = z\}.$$

Damit findet man eine Parametrisierung durch

$$\vec{x}_M: \underbrace{[0, 1] \times [0, 2\pi]}_{\text{Domain}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}_M(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \\ \rho \end{pmatrix}.$$

- (c) **(3 Punkte)** Diese Fläche ist die Oberfläche einer Halbkugel und der Rand ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 0, 4)$ , parallel zur  $xz$ -Ebene. Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$\vec{x}_K: \underbrace{[0, 2\pi]}_{\text{Domain}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}_K(\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ 4 + \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$


---

## 6. Aufgabe

10 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (a) Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |x| \cdot y.$$

Dann ist  $f$  im Punkt  $(0, 1)$  stetig, aber nicht differenzierbar.

- (b) Sei  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Potential  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und Vektorpotential  $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Dann verschwindet das Flussintegral von  $\vec{v}$  durch den Rand des Würfels  $Q = [0, 1]^3$ , es gilt also

$$\iint_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0.$$

- (c) Seien  $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potentialfeld und  $\gamma$  eine Kurve mit Parametrisierung  $\vec{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  so, dass  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$  gilt. Dann ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, d.h. es gilt  $\vec{x}(0) = \vec{x}(1)$ .  
 (d) Sei  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4\}$  und die Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar und nicht konstant auf  $A$ . Dann gibt das Lagrange-Verfahren mindestens zwei Kandidaten für Extremstellen von  $h$  auf  $A$ .
-



- (a) **(3 Punkte)** Diese Aussage ist wahr.  $f$  ist als Komposition stetiger Funktionen selbst auch stetig. (Dies lässt sich auch schnell überprüfen, denn es gilt  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} |x|y = |0|1 = 0 = f(0,0)$ ).

Allerdings ist  $x \mapsto |x|y$  für kein  $y \neq 0$  partiell differenzierbar (in  $x$ -Richtung) und damit auch nicht (total) differenzierbar. Dies lässt sich auch einfach überprüfen im zu untersuchenden Punkt  $(1,0)$ , indem man z.B. die Folgen  $(\pm x_n, y_n) = (\pm \frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0,1)$ ,  $n \rightarrow \infty$  betrachtet. Denn damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n, y_n) - f(0,1)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-x_n, y_n) - f(0,1)}{-x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Da die Grenzwerte nicht übereinstimmen, kann  $f$  in  $(0,1)$  nicht partiell nach  $x$  differenzierbar sein.

- (b) **(2 Punkte)** Diese Aussage ist wahr. Da  $\vec{v}$  ein Vektorpotential hat, muss die dafür notwendige Bedingung  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  erfüllt sein. Nach dem Satz von Gauß gilt damit

$$\iint_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{v} \, dx dy = 0.$$

- (c) **(3 Punkte)** Diese Aussage ist falsch. Man betrachte das Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{x}) = 0$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ . Sei  $\gamma$  die Kurve deren Parametrisierung gegeben ist durch  $\vec{x}(t) = (0,1)$ ,  $t \in [0,1]$ . Dann ist  $\gamma$  keine geschlossene Kurve, da  $\vec{x}(0) = (0,0) \neq (0,1) = \vec{x}(1)$ , aber es gilt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{0} \cdot d\vec{s} = 0.$$

- (d) **(2 Punkte)** Diese Aussage ist wahr. Da  $A$  abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt ist, nimmt die stetige Funktion  $h$  auf der kompakten Menge  $A$  sowohl ihr Maximum in einem Punkt  $\vec{x}_0 \in A$ , als auch ihr Minimum in einem Punkt  $\vec{x}_1 \in A$  an. Da  $h$  weiter nicht konstant auf  $A$  ist, sind diese beiden Punkte unterschiedlich und werden vom Lagrange-Verfahren gefunden.

## 7. Aufgabe

6 Punkte

In einem Modellversuch wird die vertikale Beschleunigung  $a$  eines Körpers ermittelt. Das gemessene Gewicht des Körpers beträgt  $m_0 = 50,5 \text{ kg}$  und die gemessene vertikale Kraft, die auf ihn wirkt, beträgt  $F_0 = 2525 \text{ N}$ . Es gilt  $a(F, m) = F/m$ .

*Hinweis:* Es gilt  $1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ . In Ihren Rechnungen dürfen Sie aber auf die Einheiten verzichten.

- (a) Berechnen Sie die aus den Messwerten resultierende Beschleunigung  $a_0 = a(F_0, m_0)$ .
- (b) Es wird eine Messtoleranz von  $\pm 25 \text{ N}$  bzw.  $\pm 0,5 \text{ kg}$  angenommen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes die größtmögliche vertikale Beschleunigung, die auf den Körper wirken kann.

- (a) Es gilt

$$a(F_0, m_0) = \frac{F_0}{m_0} = \frac{2525}{50,5} = 50.$$

- (b) Die größtmögliche vertikale Beschleunigung berechnen wir mit dem Fehlerschrankensatz, dabei gilt

$$\frac{\partial a}{\partial F}(F, m) = \frac{1}{m}, \quad \frac{\partial a}{\partial m}(F, m) = -\frac{F}{m^2}.$$

Damit erhalten wir die Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial a}{\partial F}(F, m) \right| \leq \frac{1}{50,5 - 0,5} = \frac{1}{50} = 0,02,$$

$$\left| \frac{\partial a}{\partial m}(F, m) \right| \leq \frac{2525 + 25}{(50,5 - 0,5)^2} = \frac{2550}{50^2} = \frac{51}{50} = 1,02.$$

Mit dem Fehlerschrankensatz erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |a(F, m) - a(F_0, m_0)| &\leq \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{51}{50} \cdot 0,5 = \frac{1 \cdot 50 + 51}{2 \cdot 50} = \frac{101}{100} = 1,01 \\ &(\leq 0,02 \cdot 25 + 1,02 \cdot 0,5) = 1,01 \end{aligned}$$

für alle  $(F, m)$  im untersuchten Bereich und somit ist die größtmögliche Beschleunigung gegeben durch

$$a_{\max} = 50 + 1,01 = 51,01.$$