Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 14

C. Mehl, G. Penn-Karras 08.10.2014

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

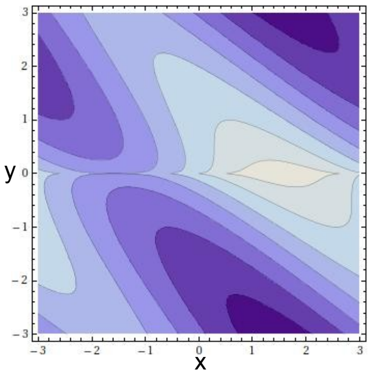
6 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

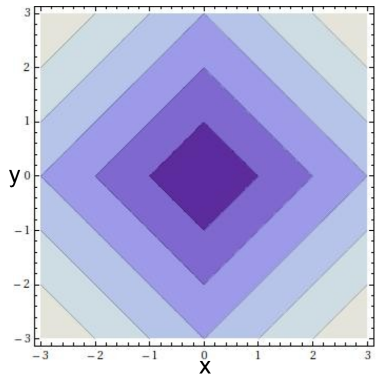
$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \\
&g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x + 2y \\
&h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = \begin{cases} |x|, & \text{falls } |x| \geq |y| \\ |y|, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ordnen Sie den Abbildungen f, g und h die entsprechende Skizze der Niveaulinien zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.

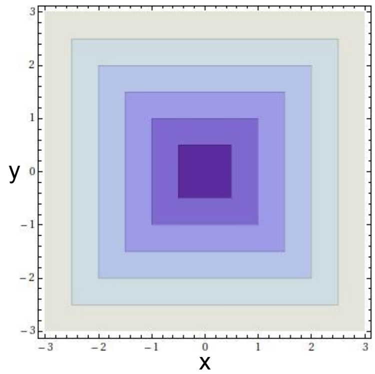
Hinweis: Zu jeder Abbildung gehört genau eine Skizze. In den Skizzen verläuft die x-Achse von links nach rechts und die y-Achse von unten nach oben.



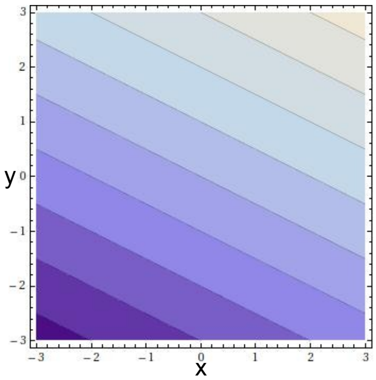
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



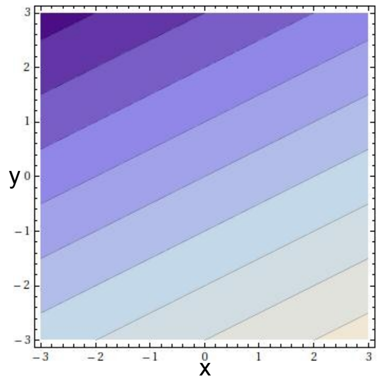
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



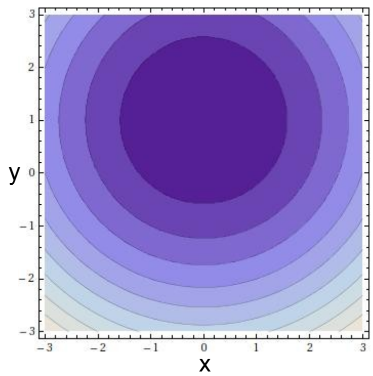
$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$



$f\colon \square$, $g\colon \square$, $h\colon \square$

2. Aufgabe

7 Punkte

Es seien

$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{3(x^2-y^2)+\sin x}, \\
&\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(a) Berechnen Sie $\vec{g}(2,0)$ und $\vec{g}\,'(2,0)$.

(b) Berechnen Sie $f'(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung von $f \circ \vec{g}$ an der Stelle $(2,0)$.

3. Aufgabe

8 Punkte

Skizzieren Sie den Integrationsbereich der folgenden Integrale und ändern Sie die Integrationsreihenfolge. Achten Sie darauf, die Integrationsgrenzen anzupassen. Dabei sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

(a)

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 f(x,y)\ dx\,dy$$

(b)

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x,y)\ dy\,dx$$

(c)

$$\int_0^2 \int_{x/2}^x f(x,y)\ dy\,dx + \int_2^4 \int_{x/2}^2 f(x,y)\ dy\,dx$$

4. Aufgabe

17 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die skalare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Weiterhin seien die Fläche M und der Körper Z gegeben durch

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 1\}$$
$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 4,\ \ -1 \le y \le 2\}.$$

(a) Geben Sie an, welche geometrischen Objekte durch M und Z beschrieben werden.

(b) Bestimmen Sie ein Potential von $\vec{v}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert des vektoriellen Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds},$$

wobei γ die Randkurve von M ist.

(d) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals

$$\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot \vec{dO}.$$

(e) Bestimmen Sie den Wert des skalaren Oberflächenintegrals

$$\iint_M f\ dO.$$

(f) Bestimmen Sie den Wert des Volumenintegrals

$$\iiint_Z f\ dx\,dy\,dz.$$

5. Aufgabe
8 Punkte

Es seien $a, b, c \geq 0$ die Seitenlängen eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das maximale Volumen von Q unter der Bedingung, dass die Summe der Seitenlängen 3 ist, d.h. dass $a+b+c=3$ gilt. Begründen Sie insbesondere auch, warum das berechnete Volumen ein Maximum ist. Geben Sie ebenso das Minimum an.

6. Aufgabe
14 Punkte

Geben Sie zu folgenden Punkten jeweils ein Beispiel an.

Hinweis: Sie müssen ihre jeweiligen Beispiele nicht begründen!

(a) Eine unbeschränkte Folge im $\mathbb{R}^2$, die eine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, die mindestens einen ihrer Randpunkte enthält, jedoch nicht alle.

(c) Eine abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^2$, die nicht kompakt ist.

(d) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in mindestens einem Punkt unstetig ist.

(e) Eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in mindestens einem Punkt nicht differenzierbar ist.

(f) Eine abgeschlossene Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $h\colon E \to \mathbb{R}$ so, dass h auf E ihr Maximum, jedoch nicht ihr Minimum annimmt.

(g) Ein Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das kein Vektorpotential besitzt.