Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
C. Mehl, G. Penn-Karras

SS 14
08.10.2014

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

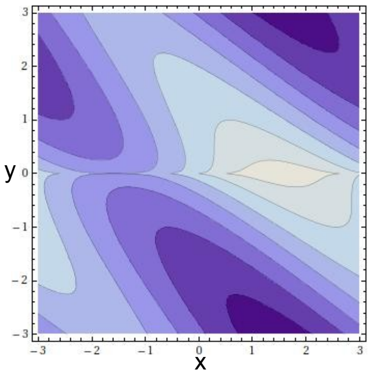
6 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

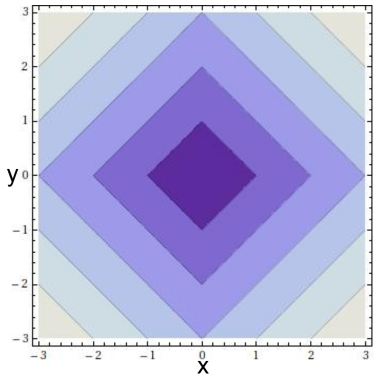
$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + (y-1)^2\\
&g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x + 2y\\
&h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = \begin{cases} |x|, & \text{falls } |x| \geq |y| \\ |y|, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ordnen Sie den Abbildungen f, g und h die entsprechende Skizze der Niveaulinien zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.

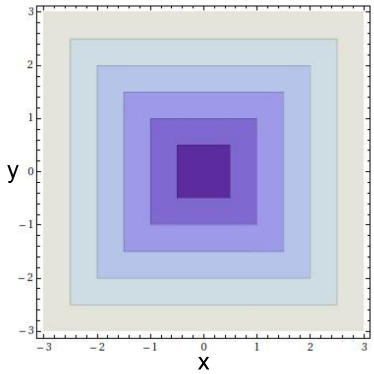
Hinweis: Zu jeder Abbildung gehört genau eine Skizze. In den Skizzen verläuft die x-Achse von links nach rechts und die y-Achse von unten nach oben.



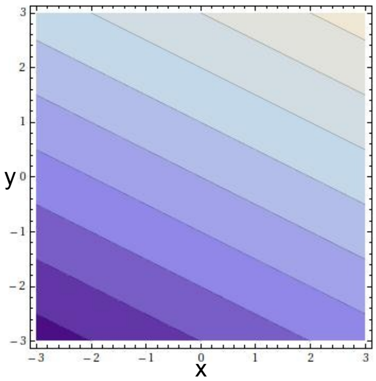
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



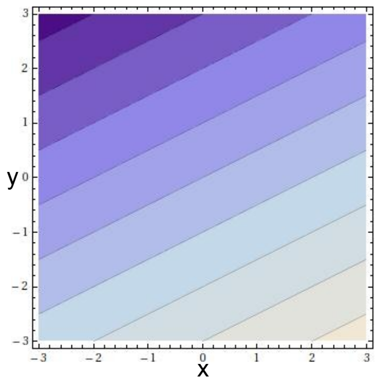
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



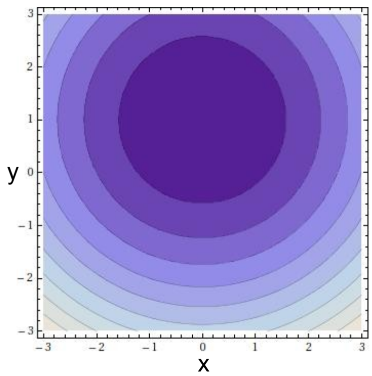
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



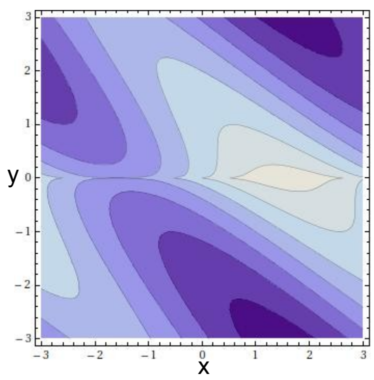
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



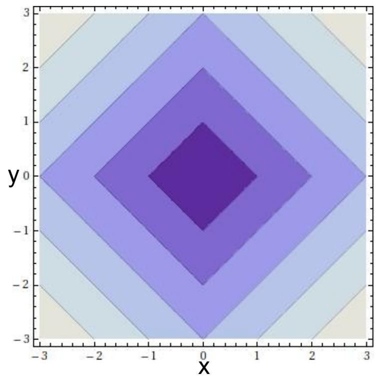
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



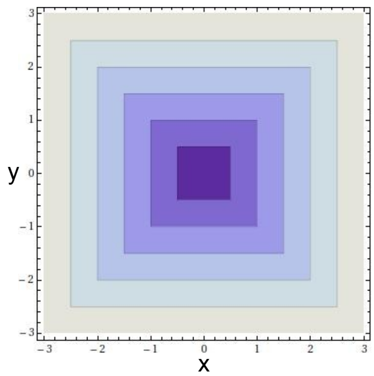
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



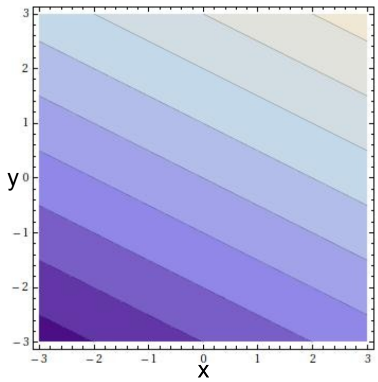
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



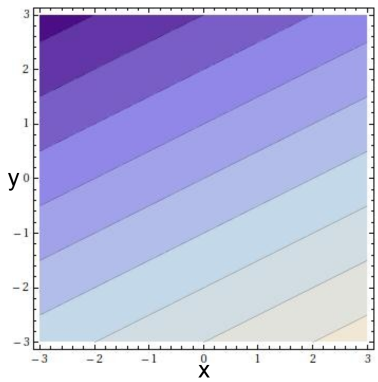
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



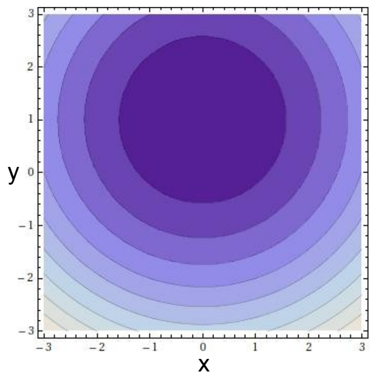
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \boxtimes$



$f\colon \square,\ g\colon \boxtimes,\ h\colon \square$



$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



$f\colon \boxtimes,\ g\colon \square,\ h\colon \square$

2. Aufgabe

7 Punkte

Es seien

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{3(x^2-y^2)+\sin x},$$
$$\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\vec{g}(2,0)$ und $\vec{g}\,'(2,0)$.

(b) Berechnen Sie $f'(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung von $f\circ\vec{g}$ an der Stelle $(2,0)$.

(a) Es gilt

$$\vec{g}(2,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und für $(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2$,

$$\vec{g}\,'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

sodass

$$\vec{g}\,'(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$f'(x,y) = \left((6x + \cos x)e^{3(x^2-y^2)+\sin x} \quad -6ye^{3(x^2-y^2)+\sin x} \right).$$

(c) Wir benutzen die Kettenregel mit Ableitungsmatrizen :

$$\begin{aligned} (f \circ \vec{g})'(2,0) &= f'(\vec{g}(2,0))\vec{g}'(2,0) \\ &= f'(0,2)\vec{g}'(2,0) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-12} & -12e^{-12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12e^{-12} & 2e^{-12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Skizzieren Sie den Integrationsbereich der folgenden Integrale und ändern Sie die Integrationsreihenfolge. Achten Sie darauf, die Integrationsgrenzen anzupassen. Dabei sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

(a)

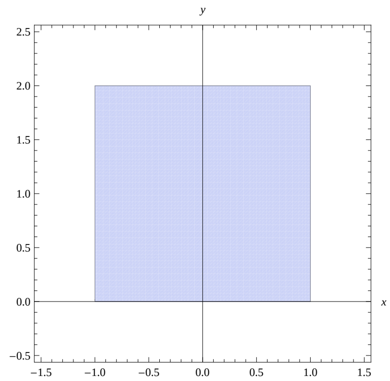
$$\int_0^2 \int_{-1}^1 f(x,y)\ dx\,dy$$

(b)

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x,y)\ dy\,dx$$

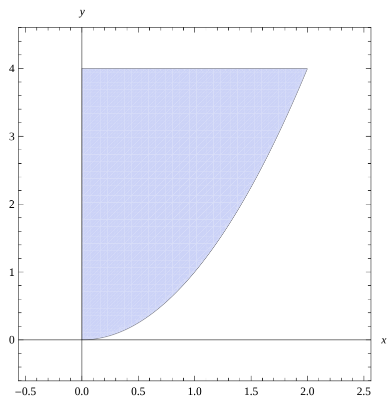
(c)

$$\int_0^2 \int_{x/2}^x f(x,y)\ dy\,dx + \int_2^4 \int_{x/2}^2 f(x,y)\ dy\,dx$$



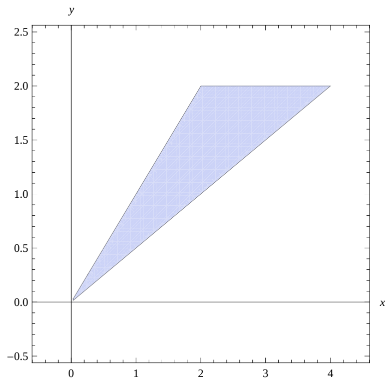
(a)

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 f(x,y)\ dx\,dy = \int_{-1}^1 \int_0^2 f(x,y)\ dy\,dx.$$



(b)

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x,y)\ dy\,dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\,dy.$$

(c) 

+

$$\int_0^2 \int_{x/2}^{x} f(x,y)\; dy\, dx + \int_2^4 \int_{x/2}^{2} f(x,y)\; dy\, dx = \int_0^2 \int_y^{2y} f(x,y)\; dx\, dy. \qquad +$$

4. Aufgabe

17 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die skalare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Weiterhin seien die Fläche M und der Körper Z gegeben durch

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 1\}$$
$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 4,\ -1 \le y \le 2\}.$$

(a) Geben Sie an, welche geometrischen Objekte durch M und Z beschrieben werden.

(b) Bestimmen Sie ein Potential von $\vec{v}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert des vektoriellen Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds},$$

wobei γ die Randkurve von M ist.

(d) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals

$$\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot \vec{dO}.$$

(e) Bestimmen Sie den Wert des skalaren Oberflächenintegrals

$$\iint_M f\ dO.$$

(f) Bestimmen Sie den Wert des Volumenintegrals

$$\iiint_Z f\ dx\, dy\, dz.$$

(a) M ist die Oberfläche des Kegels mit Spitze in $(0,0,0)$ und der zur xy-Ebene parallelen Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0,1)$ und Radius 1 als Grundfläche.

K ist ein Zylinder mit Radius 2 dessen Grundflächen parallel zur xz-Ebene liegen mit Mittelpunkt in $(0,2,0)$, resp. $(0,-1,0)$.

z

(b) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \;\; (x,y,z)^T \mapsto xyz^2$. Da $\operatorname{grad}_{(x,y,z)} g = \left(yz^2, xz^2, 2xy\right)^T = \vec{v}(x,y,z)$, ist g ein Potential von $\vec{v}$.

(c) $\vec{v}$ hat ein Potential, und die Randkurve von M ist eine geschlossene Kurve, also gilt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{ds} \;=\; 0.$$

(d) Mit dem Satz von Gauss gilt

$$\iint_{\partial Z} \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_Z \operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v}\; dx\,dy\,dz.$$

Variante 1: direkt berechnen

Mit $\operatorname{div}_{(x,y,z)}\vec{v} = 2xy$ erhält man

$$\begin{aligned}\iiint_Z \operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v}\; dx\,dy\,dz &= \int_{-1}^{2}\int_0^2\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} 2xydx\,dz\,dy \\ &= \int_{-1}^{2} ydy \int_0^2 [x^2]|_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dz \\ &= \int_{-1}^{2} ydy \underbrace{\int_0^2 [(4-z^2)-(4-z^2)]dz}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Variante 2: Transformationssatz

Über "y-Achse Zylinderkoordinaten" erhalten wir eine Transformation:

$$\begin{aligned}\vec{x}_Z \;:\; &[-1,2]\times[0,2]\times[0,2\pi] \to M \\ &(y,\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), y, \rho\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Das Volumenelement ist dann

$$dV = \rho dy\,d\rho\,d\theta,$$

und mit $\operatorname{div}_{(x,y,z)}\vec{v} = 2xy$ gilt $\operatorname{div}_{\vec{x}_Z(y,\rho,\theta)}\vec{v} = 2y\rho\cos(\theta)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\iiint_Z \operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v}\; dx\,dy\,dz &= \int_{-1}^{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} 2\rho^2 y\cos(\theta)\,d\theta\,d\rho\,dy \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos(\theta)\,d\theta}_{=0} \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{-1}^{2} y\,dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

(e) Eine Parametrisierung von M ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$\vec{x}_M : [0,2\pi]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3,\;\; (\theta,z) \mapsto (z\cos(\theta), z\sin(\theta), z).$$

Das skalare Oberflächenelement ist dann

$$
\begin{aligned}
dO &= \left| \frac{\partial \vec{x}_M}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}_M}{\partial z} \right| dz\, d\theta \\
&= \left| \begin{pmatrix} -z\sin\theta \\ z\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{2} z\, dz\, d\theta,
\end{aligned}
$$

und $f \circ \vec{x}_M(\theta, z) = 2z^2$, also gilt

$$
\begin{aligned}
\iint_M f\ dO &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} z^3\, d\theta\, dz \\
&= \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

(f) Mit der Transformation $\vec{x}_Z$ von Teil (d) gilt $f \circ \vec{x}_Z(y, \rho, \theta) = y^2 + \rho^2$. Mit dem Transformationssatz folgt dann

$$
\begin{aligned}
\iiint_Z f\ dx\, dy\, dz &= \int_{-1}^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (y^2 + \rho^2)\rho\, d\theta\, d\rho\ dy \\
&= \int_{-1}^2 \int_0^2 2\pi(y^2 + \rho^2)\rho\, d\rho\ dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^2 \left[y^2 \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^2 (2y^2 + 4)\, dy \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3} y^3 + 4y \right]_{y=-1}^{y=2} \\
&= 36\pi.
\end{aligned}
$$

---

5. Aufgabe

8 Punkte

Es seien $a, b, c \geq 0$ die Seitenlängen eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das maximale Volumen von Q unter der Bedingung, dass die Summe der Seitenlängen 3 ist, d.h. dass $a+b+c = 3$ gilt. Begründen Sie insbesondere auch, warum das berechnete Volumen ein Maximum ist. Geben Sie ebenso das Minimum an.

Für ein Quader mit Seitenlängen a, b, c ist seine Volumen gegeben mit $f(a, b, c) = abc$.

Da

$$
K = \{(a, b, c) \mid a, b, c \geq 0,\ a + b + c = 3\}
$$

kompakt ist, nimmt f ihr Maximum und Minimum auf K an.

Wenn a, b oder c Null ist, gilt $f(a, b, c) = 0$ (und das ist offensichtlich das Minimum von f).

Also soll das Maximum von f in einem Punkt (a, b, c) mit $a, b, c > 0$ liegen. Also suchen wir ein Maximum von $f(a, b, c)$ in die offene Menge $(0, +\infty)^3$, unter den Nebendingung

$$
g(a, b, c) := a + b + c - 3 = 0.
$$

Es gilt $\mathrm{grad}_{(a,b,c)}\, g = (1, 1, 1)^T$, sodass es keine singuläre Punkte gibt.

Jetzt benutzen wir die Lagrange-Methode :

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{(a,b,c)} f = \lambda \operatorname{grad}_{(a,b,c)} g, \\ g(a,b,c) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \lambda, \\ ac = \lambda, \\ ab = \lambda, \\ a+b+c = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a = b = c = \lambda = 1,$$

und dann gilt $f(1,1,1) = 1$. 1 ist also das maximale Volumen des Quaders Q unter der Bedingung, dass die Summe der Seitenlängen 3 ist.

---

6. Aufgabe

14 Punkte

Geben Sie zu folgenden Punkten jeweils ein Beispiel an.
Hinweis: Sie müssen ihre jeweiligen Beispiele nicht begründen!

(a) Eine unbeschränkte Folge im $\mathbb{R}^2$, die eine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, die mindestens einen ihrer Randpunkte enthält, jedoch nicht alle.

(c) Eine abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^2$, die nicht kompakt ist.

(d) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in mindestens einem Punkt unstetig ist.

(e) Eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in mindestens einem Punkt nicht differenzierbar ist.

(f) Eine abgeschlossene Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $h\colon E \to \mathbb{R}$ so, dass h auf E ihr Maximum, jedoch nicht ihr Minimum annimmt.

(g) Ein Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das kein Vektorpotential besitzt.

(a) Es sei

$$a_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, & n \text{ gerade} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine unbeschränkte Folge, aber die Teilfolge $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ ist konstant, also konvergent.

(b) Es sei

$$B = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Dann sind $(0,0)$ und $(1,0)$ Randpunkte von B, mit $(0,0) \in B$ und $(1,0) \notin B$.

(c) Jede abgeschlossene unbeschränkte Menge, zum Beispiel $C = \mathbb{R}^2$, ist nicht kompakt.

(d) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Dann ist f im Nullpunkt nicht stetig.

(e) Es sei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dann ist g im $\mathbb{R}^2$ stetig, aber nicht differenzierbar in $(0,0)$ ($g(x,0) = |x|$, also $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ existiert nicht).

(f) Es sei $E = \mathbb{R}^2$ und
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -x^2.$$
Dann nimmt h ihr Maximum im Nullpunkt an, aber $\lim_{x\to\infty} h(x, 0) = -\infty$, sodass h ihr Minimum auf $\mathbb{R}^2$ nicht annimmt.

(g) Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^T \mapsto (x, 0, 0)^T$. Dann gilt $\operatorname{div} \vec{v} = 1 \neq 0$, sodass $\vec{v}$ kein Vektorpotential besitzt.