Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe

WS 14/15
20.02.2015

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

1. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades Tf der Funktion

$$f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Skizzieren Sie die Niveaulinien des Taylorpolynoms Tf zu den Werten $0, \frac{1}{4}, 1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(x^2+y^2)\\
f'(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y^2) & 2y\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}\\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} -4\sin(x^2+y^2)x^2 + 2\cos(x^2+y^2) & -4\sin(x^2+y^2)xy \\ -4\sin(x^2+y^2)xy & -4\sin(x^2+y^2)y^2 + 2\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}\\
&\Rightarrow f(0,0) = 0, \qquad \Rightarrow f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom lautet also:

$$\begin{aligned}
T^f_{(0,0)}(x,y) &= f(0,0) + \operatorname{grad} f(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-0, y-0)\ H_f(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\\
&= 0 + (0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-0, y-0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\\
&= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Skizzen zu den Niveaulinien:

$z = 0$: Die Niveaulinie besteht nur aus einem Punkt, $N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 0\}$.

$z = \frac{1}{4}$: Die Niveaulinie ist ein Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2}$, $N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$.

$z = 1$: Die Niveaulinie ist ein Kreis mit Radius $r = 1$, $N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\}$.

2. Aufgabe

7 Punkte

Es sei $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel. Aus dieser wird der in der Skizze gekennzeichnete Kugelsektor S ausgeschnitten.

(a) Berechnen Sie das Volumen des Kugelsektors S.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_S 8z\ dxdydz.$$

(a) **(4 Punkte)** Um das Volumen des Kugelsektors zu berechnen, betrachten wir alles in Kugelkoordinaten, d.h.

$$\iiint_S 1\,dx\,dy\,dz \Longrightarrow \iiint_S r^2\sin(\theta)\,d\theta\,dr\,d\varphi.$$

Wir müssen zunächst die Grenzen festlegen. Offensichtlich ist $r \in [0,1]$ und $\varphi \in [0,2\pi]$. Das Intervall für den Winkel θ können wir aus der Skizze ablesen. Somit folgt $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)\,d\varphi\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{3}[-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}\pi.$$

(b) **(3 Punkte)** Wir nutzen die Informationen aus der Aufgabe (a). Für die Funktion $f(x,y,z) = 8z$ gilt nach der Transformation in Kugelkoordinaten $\tilde{f}(r,\varphi,\theta) = 8r\cos(\theta)$.
Somit folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\int_0^{2\pi} 8r^3\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\varphi\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = 4\pi\left[-\frac{1}{2}\cos^2(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi.$$

3. Aufgabe

6 Punkte

In der folgenden Tabelle sind verschiedene Mengen gegeben. Kennzeichnen Sie jeweils, ob die angegebene Eigenschaft zutrifft (mit +) oder nicht zutrifft (mit -). Es soll in jedes Feld ein Zeichen geschrieben werden.

Menge	offen	beschränkt	kompakt
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 3y < 1\}$			
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,1]\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-42)^2 \leq 17, x < 0\}$			

Menge	offen	beschränkt	kompakt
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 3y < 1\}$	+	-	-
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,1]\}$	-	+	+
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-42)^2 \leq 17, x < 0\}$	-	+	-

4. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 5\lambda y + 3yz \\ 5x + 3\lambda xz - 2 \\ 2xy + \lambda xy - 4z \end{pmatrix},$$

in Abhängigkeit von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Für welchen Wert λ^* besitzt das Vektorfeld $\vec{v}_\lambda$ ein Potential $u(x,y,z)$? Bestimmen Sie für dieses spezielle λ^* ein Potential $u(x,y,z)$.

(b) Besitzt $\vec{v}_\lambda$ ein Vektorpotential?

(c) Es sei S die Strecke, die vom Punkt $(1,1,1)$ zum Punkt $(1,0,1)$ führt. Berechnen Sie für den in (a) berechneten Wert λ^* das Kurvenintegral

$$\int_S \vec{v}_{\lambda^*} \, \vec{ds}.$$

Hinweis: Sollten Sie in (a) keine Lösung gefunden haben, berechnen Sie dieses Integral für ein allgemeines $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Es sei $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x, z \in [0,2]\}$. Skizzieren Sie die Menge P und berechnen Sie das Flussintegral

$$\iint_{\partial P} \vec{v}_\lambda \cdot d\vec{O}.$$

(a) **(5 Punkte)** Wir müssen zunächst die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}$ bestimmen.

$$\mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3x^2 + 5\lambda y + 3yz \\ 5x + 3\lambda yz - 2 \\ 2xy + \lambda xy - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \lambda x - 3\lambda x \\ 3y - 2y - \lambda y \\ 5 + 3\lambda z - 5\lambda - 3z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Offensichtlich ist dies für $\lambda^* = 1$ erfüllt. Da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ darüberhinaus offen und konvex ist, ist die hinreichende Bedingung für ein Potential somit erfüllt. Nun können wir mit diesem speziellen λ^* ein Potential u nach der Gleichung $\vec{v} = -\,\mathrm{grad}\, u$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
& u(x,y,z) && = \int -3x^2 - 5y - 3yz\; dx = -x^3 - 5xy - 3xyz + C(y,z) \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) && = -5x - 3xz - \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \stackrel{!}{=} -5x - 3xz + 2 \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{\partial C(y,z)}{\partial y} && = 2 \\
\Rightarrow\quad & C(y,z) && = 2y + D(z) \\
\Rightarrow\quad & u(x,y,z) && = -x^3 - 5xy + 3xyz + 2y + D(z) \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) && = -3xy + D'(z) \stackrel{!}{=} -3xy + 4z \\
\Rightarrow\quad & D'(z) && = 4z \\
\Rightarrow\quad & D(z) && = 2z^2 + E \\
\Rightarrow\quad & u(x,y,z) && = -x^3 - 5xy - 3xyz + 2y + 2z^2 + E, \qquad E \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ein mögliches Potential ist also $u(x,y,z) = -x^3 - 5xy - 3xyz + 2y + 2z^2$.

(b) **(2 Punkte)** Für den Test, ob $\vec{v}$ ein Vektorpotential besitzt müssen wir die Divergenz berechnen:

$$\mathrm{div}\vec{v}(x,y,z) = 6x - 4 \neq 0$$

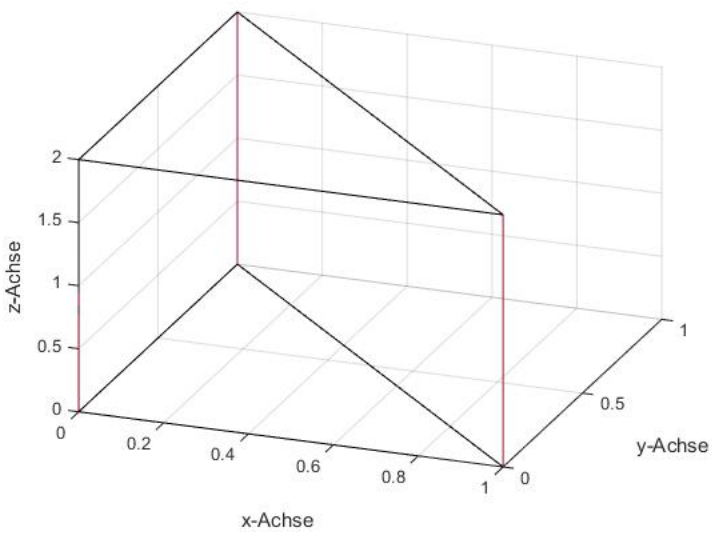
und somit folgt, das $\vec{v}$ kein Vektorpotential besitzt.

(c) **(2 Punkte)** Für die Berechnung des Kurvenintegrals nutzen wir das Potential u:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = u(1,1,1) - u(1,0,1) = -1 - 5 - 3 + 2 + 2 - (-1 + 2) = -6.$$

(d) **(4 Punkte)**

Skizze:



Um dieses Flussintegral zu berechnen, verwenden wir den Satz von Gauss:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial P} \vec{v}_\lambda \cdot d\vec{O} &= \iiint_P \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^2 6x - 4\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 12x - 8\, dy\, dx = \int_0^1 12x - 12x^2 - 8 + 8x\, dx = -2.\end{aligned}$$

5. Aufgabe

12 Punkte

Es sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := 4(x-y) - x^2 - y^2, \quad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Besitzt die Funktion f globale Extremwerte? Wenn ja, bestimmen Sie alle globalen Extrempunkte der Funktion f in der Menge D.

(*Hinweis: Es gilt* $\frac{24}{\sqrt{2}} - \frac{18}{2} < 8$.)

Da D eine kompakte Menge (eine Kreisscheibe vom Radius 3) und die Funktion f als Polynom eine stetige Funktion sind, werden sowohl Minimum als auch Maximum auf D angenommen.

<u>Schritt 1:</u> Extrempunkte im Innern der Menge D
Es gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4-2x \\ -4-2y \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Punkte sind gegeben durch:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-2x \\ -4-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2, \quad y = -2.$$

Einziger kritischer Punkt: $P_1 = (2,-2)$.
Die Hessematrix lautet:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$H_f(2,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit (da alle Eigenwerte negativ sind), somit ist $P_1 = (2,-2)$ ein lokales Maximum mit $f(2,-2) = 8$.

<u>Schritt 2:</u>
Um die Extrempunkte von f auf dem Rand ∂D der Ellipse D zu bestimmen benutzen wir die Lagrangemultiplikatoren.
Die Nebenbedingung ist gegeben durch

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

<u>Schritt 2.1:</u> Singuläre Punkte
Als erstes betrachtet man die Punkte mit

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0).$$

Da aber $g(0,0) = 9 \neq 0$ gilt, können wir singuläre Punkte ausschließen.

<u>Schritt 2.2</u>
Nun berechnen wir die Punkte mit

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= \lambda \operatorname{grad} g(x,y), \quad \lambda \neq 0, \\ g(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4-2x \\ -4-2y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \\ x^2+y^2-9 &= 0, \end{aligned}$$

d.h. es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$4-2x = \lambda 2x, \tag{1}$$
$$-4-2y = \lambda 2y, \tag{2}$$
$$x^2+y^2-9 = 0. \tag{3}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2\lambda+2) \\ y(2\lambda+2) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2\lambda+2) \\ -y(2\lambda+2) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &x(2\lambda+2) = -y(2\lambda+2) \\ \Rightarrow &x = -y \text{ oder } \lambda = -1 \end{aligned}$$

$\lambda = -1$ führt allerdings zu einem Widerspruch in unserem Gleichungssystem. Die einzige Lösung stammt also aus der Bedingung $y = -x$. Dies setzen wir in die 3.Gleichung ein und erhalten

$$x^2+y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Somit haben wir die Punkte $P_2 = (\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ und $P_3 = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ ermittelt. Der Lagrange'sche Multiplikator λ ist für uns nicht relevant.

Für den Punkt P_2 erhält man $f(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{24}{\sqrt{2}} - \frac{18}{2} < 8$ und für P_3 gilt $f(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}) = -\frac{24}{\sqrt{2}} - \frac{18}{2} < 0$.

Der Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass

$$\begin{aligned} P_1 &= (2,-2) \text{ globales Maximum}, \\ P_3 &= \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ globales Minimum} \end{aligned}$$

von f in der Menge D sind.

6. Aufgabe

8 Punkte

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} + x^2 \sin(y), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion g in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion g in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen sie existieren.

(c) Begründen Sie, dass nicht alle partiellen Ableitungen von g in $(0, 0)$ stetig sind.

(a) **(4 Punkte)** Die Funktion g ist ausserhalb von $(0, 0)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir müssen nur noch die Stetigkeit an Stelle $(0, 0)$ untersuchen. Wir definieren die Folgen $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ mit $x_n = y_n \to 0$, für $n \to \infty$ und nutzen diese für die Untersuchung des Grenzprozesses:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Damit ist die Funktion g an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig.

(b) **(3 Punkte)** Die partiellen Ableitung ausserhalb von $(0, 0)$ können, wie üblich berechnetet werden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + 2x \sin(y) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} + x^2 \cos(y).$$

Bezüglich der Stelle $(0, 0)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0^2} + h^2 \cdot 0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0^2+h^2} + 0 \cdot \sin(h) - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Somit existieren die partiellen Ableitungen.

(c) Weil g in $(0, 0)$ nicht stetig ist, ist die Funktion an der Stelle auch nicht differenzierbar. Da die Funktion nicht differenzierbar ist, können die partiellen Ableitungen nicht stetig sein.

Oder: Wären die partiellen Ableitungen stetig, so wäre g in (0,0) differenzierbar. Wäre g differenzierbar, so wäre g auch stetig in diesem Punkt. Das ist aber nach Tei a) nicht der Fall.

---

7. Aufgabe

8 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel

(a) Es existiert genau eine Abbildung $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\vec{w}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ist $\vec{w}_1$ ein Vektorpotential zu $\vec{v}$, dann ist auch $\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + \operatorname{grad} f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$.

(c) Es sei $\vec{v}$ ein differenzierbares Vektorfeld mit Potential u, dann ist u ebenso differenzierbar.

(d) Es sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum, dann gilt für die Hessematrix $\det(f''(\vec{x}_0)) > 0$.

(a) Falsch! Jede Funktion der Form $w(x,y) = [x^2y + C, 2y + D]^T$ mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$, besitzt diese Ableitung. Die Funktionen sind also nicht eindeutig.

(b) Richtig! Da $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ gilt, ist $\operatorname{rot}\vec{w}_2 = \operatorname{rot}\vec{w}_1 + \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\vec{w}_1 = \vec{v}$. Somit ist auch $\vec{w}_2$ ein Vektorpotential zu $\vec{v}$.

(c) Richtig! Denn wir haben ein Potential, somit gilt per Definition $-\vec{v} = \operatorname{grad} u$. Das bedeutet, dass die Ableitung von u existiert und die Funktion damit differenzierbar ist.

(d) Falsch! Die Determinante gibt keine Auskunft über die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte. Ein Gegenbeispiel ist die Nullfunktion, die zwar überall ein lokales Minimum hat, für die aber immer $\det(f''(x)) = 0$ gilt.