Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 14/15

G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe, G. Penn-Karras 10.04.2015

April – Klausur
Analysis II für Ingenieurswissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

☐ Prüfungsklausur (8 LP) ☐ Prüfungsklausur (9 LP mit HA) ☐ Weiß nicht
☐ Übungsscheinklausur ☐ Prüfungsklausur (6 LP ohne HA)

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen

$$\vec{f} :]0,\infty[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 \ln(x) \end{pmatrix},$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (u,v) \mapsto 2u + e^{v^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $\vec{f}$ an der Stelle $(1,0,1)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $h \circ \vec{f}$ an der Stelle $(1,0,1)$.

(c) Bestimmen Sie eine Richtung $\vec{v}$, so dass die Richtungsableitung $\frac{\partial(h\circ\vec{f})}{\partial\vec{v}}$ im Punkt $(1,0,1)$ gleich 0 ist.

2. Aufgabe

12 Punkte

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := e^{2x}(x+y^2).$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades T_2 der Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(b) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extremstellen der Funktion f.

(c) Besitzt die Funktion f ein globales Maximum? Wenn ja, in welchem Punkt wird dieses angenommen?

(d) Besitzt f eingeschränkt auf die Menge $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \in [0,1]\}$ ein globales Maximum? Wenn ja, in welchem Punkt wird dieses angenommen?

Hinweis: Sie benötigen das Lagrange-Verfahren nicht.

3. Aufgabe

6 Punkte

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(y)xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Sie dürfen die Ungleichung $2|xy| \leq x^2 + y^2$ ohne Nachweis verwenden.

(b) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen sie existiert.

4. Aufgabe

9 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

Skizzieren Sie in den Teilen (a) und (b) den Integrationsbereich der folgenden Integrale und ändern Sie die Integrationsreihenfolge. Achten Sie darauf, die Integrationsgrenzen anzupassen.

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

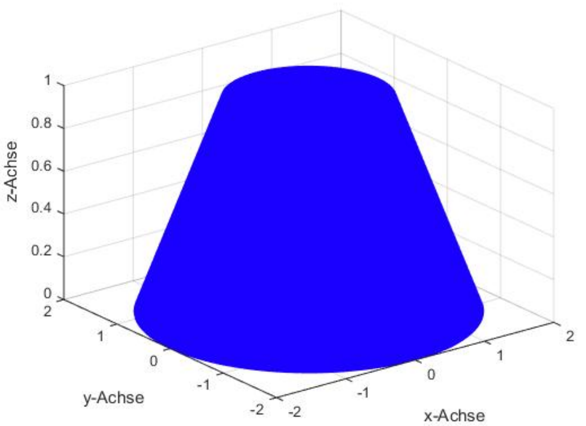
$$\text{(b)} \quad \int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^5 \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx$$

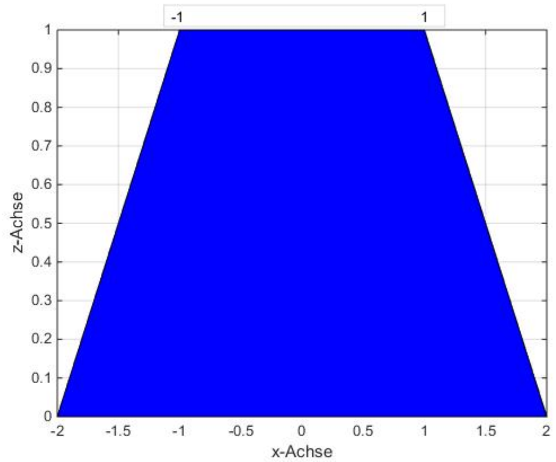
(c) Gegeben sei das Dreieck D mit den Eckpunkten $(-1,1)$, $(-1,3)$, $(1,-1)$. Skizzieren Sie die Menge und geben Sie geeignete Integrationsgrenzen für das Integral $\iint\limits_D f(x,y)\,dy\,dx$ an.

5. Aufgabe

12 Punkte

Wir betrachten den Kegelstumpf $K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2+y^2 \leq (2-z)^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$, welcher in der linken Skizze dargestellt ist. Die rechte Skizze zeigt einen Querschnitt von K in der xz-Ebene.





Gegeben sei weiter das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen von K mit Hilfe eines geeigneten Integrals.

(b) Begründen Sie, dass der Fluß von $\vec{v}$ durch die beiden Kreisscheiben, die K nach oben und unten begrenzen, null ist.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K.

6. Aufgabe

12 Punkte

Es sei $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$ und $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Geben Sie zu (a) bis (f) jeweils ein Beispiel an, welches die genannte Eigenschaft besitzt. Begründen Sie insbesondere, warum in dem von Ihnen genannten Beispiel die geforderte Eigenschaft gilt.

(a) Eine Menge, die genau dieselben Randpunkte wie D besitzt.

(b) Eine Folge in D, deren Grenzwert <u>nicht</u> in D liegt.

(c) Eine Abbildung $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^2$, die <u>kein</u> Potential besitzt.

(d) Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, die ihr globales Maximum annimmt.

(e) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die ihr globales Maximum <u>nicht</u> annimmt.

(f) Eine symmetrische 2×2-Matrix A, die positiv definit, aber keine Diagonalmatrix ist.