Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 14/15

G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe, G. Penn-Karras 10.04.2015

April – Klausur
Analysis II für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen

$$\vec{f}:]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 \ln(x) \end{pmatrix},$$
$$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (u,v) \mapsto 2u + e^{v^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $\vec{f}$ an der Stelle $(1,0,1)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $h \circ \vec{f}$ an der Stelle $(1,0,1)$.

(c) Bestimmen Sie eine Richtung $\vec{v}$, so dass die Richtungsableitung $\frac{\partial(h\circ\vec{f})}{\partial\vec{v}}$ im Punkt $(1,0,1)$ gleich 0 ist.

(a) **(2 Punkte)** Die Ableitungsmatrix von f ist:

$$\vec{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ \frac{y^2}{x} & 2y\ln(x) & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \vec{f}'(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) **(4 Punkte)** Mit der Kettenregel:
Es gilt

$$h'(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 2ve^{v^2} \end{pmatrix}.$$

und somit

$$h'(\vec{f}(1,0,1)) = h'(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel gilt dann

$$\begin{aligned}(h\circ\vec{f})'(1,0,1) &= h'(\vec{f}(1,0,1)) \cdot \vec{f}'(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativ kann die verknüpfte Funktion berechnet werden:

$$(h\circ\vec{f})'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xz & 0 & 2x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y^4\frac{\ln(x)}{x} & 4y^3\ln^2(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{y^4\ln^2(x)},$$

woraus folgt

$$(h\circ\vec{f})'(1,0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(c) **(3 Punkte)** Es gilt:

$$\langle \nabla(h\circ\vec{f})(1,0,1),\vec{v}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right\rangle = 4v_1+2v_3 \overset{!}{=} 0.$$

Wir setzen z.B. $v_1 = 1$ und $v_3 = -2$, der Wert von v_2 kann beliebig gewählt werden, z.B. als null. Eine Richtung wäre also $\vec{v} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ (oder normiert $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\end{pmatrix}$)

---

2. Aufgabe

12 Punkte

Es sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := e^{2x}(x+y^2).$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades T_2 der Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,0)$.

(b) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extremstellen der Funktion f.

(c) Besitzt die Funktion f ein globales Maximum? Wenn ja, in welchem Punkt wird dieses angenommen?

(d) Besitzt f eingeschränkt auf die Menge $R := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\in[0,2], y\in[0,1]\right\}$ ein globales Maximum? Wenn ja, in welchem Punkt wird dieses angenommen?

Hinweis: Sie benötigen das Lagrange-Verfahren nicht.

(a) **(4 Punkte)** Offensichtlich gilt $f(0,0) = 0$. Ableitung und Hessematrix:

$$f'(x,y) = e^{2x}\begin{pmatrix}2y^2+2x+1 & 2y\end{pmatrix} \qquad f'(0,0) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

und

$$H_f(x,y) = e^{2x}\begin{pmatrix}4y^2+4x+4 & 4y\\ 4y & 2\end{pmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$T_2(x,y) = f(0,0) + f'(0,0)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}H_f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x^2+y^2+x.$$

(b) **(4 Punkte)** Dazu untersuchen wir den Gradienten auf Nullstellen:

$$\nabla f(x,y) = e^{2x}\begin{pmatrix}2y^2+2x+1\\ 2y\end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}.$$

Es gilt $e^{2x}\neq 0$ für alle x. Somit folgt aus der zweiten Gleichung $y=0$ und somit aus der ersten Gleichung $2x+1=0$ bzw. $x=-\frac{1}{2}$. Für die zweite Ableitung gilt dann

$$H_f\left(-\frac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix}2e^{-1} & 0\\ 0 & 2e^{-1}\end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix hat also als einzigen, den doppelten Eigenwert $2e^{-1} > 0$ und ist somit positiv definit. In dem gefundenen kritischen Punkt liegt also ein lokales Minimum.

(c) **(2 Punkte)** Dass kein Maximum vorliegt, sieht man durch eine Grenzwertuntersuchung, z.B. für $x\to\infty$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty.$$

Da der Funktionswert über alle Grenzen wächst, liegt kein globales Maximum vor.

(d) **(2 Punkte)** Da R eine kompakte Menge und f eine stetige Funktion ist, existieren sowohl Minimum als auch Maximum auf der Menge R. Wir sehen, dass alle Ausdrücke positive Werte annehmen und jeder Ausdruck maximal wird, wenn wir den jeweils größten Wert für x bzw. y einsetzen. Das heißt, dass das Maximum der Funktion, eingeschränkt auf die Menge R, im Punkt $(2, 1)$ liegt.

---

3. Aufgabe

6 Punkte

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(y)xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Sie dürfen die Ungleichung $2|xy| \leq x^2 + y^2$ ohne Nachweis verwenden.

(b) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen sie existiert.

(a) **(4 Punkte)** Ausserhalb vom Punkt $(0, 0)$ ist die Funktion f stetig, als Komposition stetiger Funktionen. Wir müssen nur noch den Punkt $(0, 0)$ untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin(y)xy}{x^2+y^2} \right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin(y)\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin(y)}{2} \right| = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig.

(b) **(2 Punkte)** Die partielle Ableitung der Funktion f nach x existiert in allen Punkten und es gilt für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sin(y)y(x^2+y^2) - 2\sin(y)x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

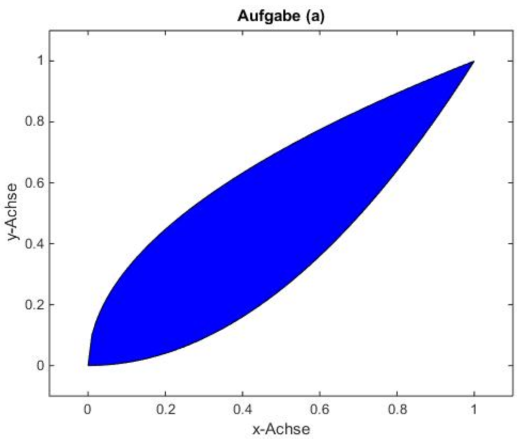
Skizzieren Sie in den Teilen (a) und (b) den Integrationsbereich der folgenden Integrale und ändern Sie die Integrationsreihenfolge. Achten Sie darauf, die Integrationsgrenzen anzupassen.

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

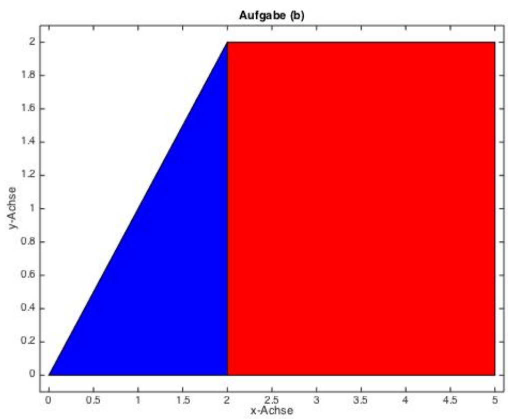
$$\text{(b)} \quad \int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^5 \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx$$

(c) Gegeben sei das Dreieck D mit den Eckpunkten $(-1,1)$, $(-1,3)$, $(1,-1)$. Skizzieren Sie die Menge und geben Sie geeignete Integrationsgrenzen für das Integral $\iint\limits_D f(x,y)\,dy\,dx$ an.

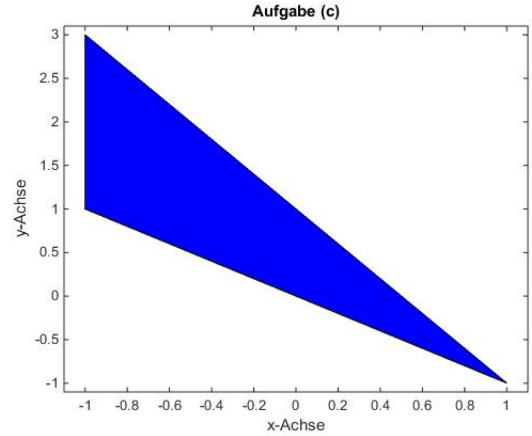
(a) **(3 Punkte)** $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$



(b) **(3 Punkte)** $\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^5 \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_y^5 f(x,y)\,dx\,dy$



(c) **(3 Punkte)** $\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{-2x+1} f(x,y)\,dy\,dx$

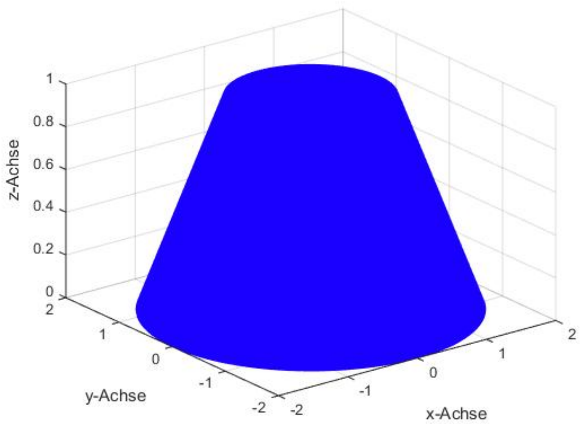


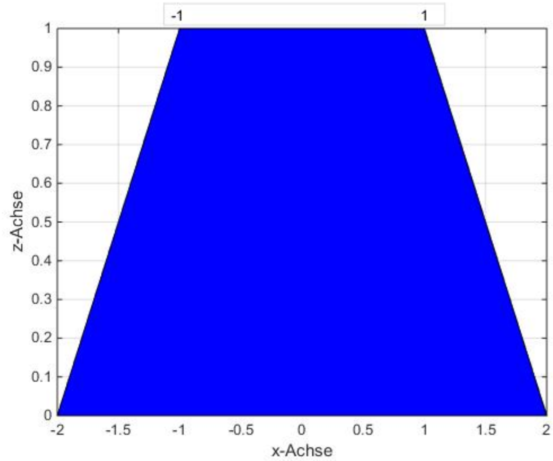
---

5. Aufgabe

12 Punkte

Wir betrachten den Kegelstumpf $K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2+y^2 \leq (2-z)^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$, welcher in der linken Skizze dargestellt ist. Die rechte Skizze zeigt einen Querschnitt von K in der xz-Ebene.





Gegeben sei weiter das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen von K mit Hilfe eines geeigneten Integrals.

(b) Begründen Sie, dass der Fluß von $\vec{v}$ durch die beiden Kreisscheiben, die K nach oben und unten begrenzen, null ist.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K.

(a) **(5 Punkte)** In Zylinderkoordinaten hat K die Darstellung

$$K = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) : 0 \leq r \leq 2-h, \varphi \in [0,2\pi], h \in [0,1]\}.$$

Damit folgt für das Volumen

$$V(K) = \iiint_K dxdydz \quad = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-h} r\, dr\, d\varphi\, dh = 2\pi \int_0^1 \frac{(2-h)^2}{2}\, dh$$

$$= -\pi \frac{(2-h)^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi.$$

(b) **(3 Punkte)** Wie wir erkennen, ist die z-Komponente des Vektorfeldes gleich 0, d.h. senkrecht zu den beiden Kreisscheiben (in z-Richtung) fließt $\vec{v}$ nicht. Somit ist das Integral über beide Kreisscheiben gleich 0.

Alternativ berechnet man den Fluss durch die beiden Kreisscheiben. Wir verwenden folgende Parametrisierung:

$$\Phi_o(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r_o \cos\varphi \\ r_o \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_u(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r_u \cos\varphi \\ r_u \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_o \in [0,1], r_u \in [0,2], \varphi \in [0,2\pi],$$

mit den dazugehörigen Oberflächenelementen:

$$d\vec{O}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_o \end{pmatrix} \qquad d\vec{O}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_u \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\iint_{K_o} \vec{v} \cdot d\vec{O}_o = 0 \text{ und } \iint_{K_u} \vec{v} \cdot d\vec{O}_u = 0,$$

d.h. durch die beiden Kreisscheiben ist der Fluss des Vektorfeldes $\iint \vec{v} d\vec{O} = 0$.

(c) **(4 Punkte)** Hier kann das Oberflächenintegral gelöst werden oder man benutzt als einfachere Variante den Satz von Gauß:

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 1 \implies \iint\limits_{\partial K} \vec{v} d\vec{O} = \iiint_K 1\, dxdydz = V(K) = \frac{7}{3}\pi$$

6. Aufgabe

12 Punkte

Es sei $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 < 1\right\}$ und $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leq 1\right\}$. Geben Sie zu (a) bis (f) jeweils ein Beispiel an, welches die genannte Eigenschaft besitzt. Begründen Sie insbesondere, warum in dem von Ihnen genannten Beispiel die geforderte Eigenschaft gilt.

(a) Eine Menge, die genau dieselben Randpunkte wie D besitzt.

(b) Eine Folge in D, deren Grenzwert <u>nicht</u> in D liegt.

(c) Eine Abbildung $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^2$, die <u>kein</u> Potential besitzt.

(d) Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, die ihr globales Maximum annimmt.

(e) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die ihr globales Maximum <u>nicht</u> annimmt.

(f) Eine symmetrische 2×2-Matrix A, die positiv definit, aber keine Diagonalmatrix ist.

(a) **(2 Punkte)** z.B.: Die Menge E. Beide Mengen haben den Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

(b) **(2 Punkte)** z.B.: Die Folge $(x_n, y_n) = (1 - \frac{1}{n}, 0)$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (1,0)$ und dieser Grenzwert liegt nicht in der Menge D, obwohl alle Folgeglieder in der Menge liegen.

(c) **(2 Punkte)** z.B.: Die Abbildung $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. Es muss als notwendige Bedingung die Ableitung symmetrisch sein. Für $\vec{v}$ gilt aber $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit erfüllt $\vec{v}$ die genannte Bedingung nicht.

(d) **(2 Punkte)** z.B.: $f(x,y) = -x^2 - y^2$. Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihre Extrema an. Dies ist in diesem Beispiel der Fall.

(e) **(2 Punkte)** z.B.: $f(x,y) = x^2$. Die Menge E ist nicht kompakt (Randpunkte fehlen), somit ist die Existenz eines Extremums nicht sichergestellt. Für dieses Bsp. sehen wir, dass die Funktion wächst, je weiter der Punkt von der y-Achse entfernt ist (d.h. je größer der Betrag von x wird). Somit wird das Maximum auf dem Rand der Menge angenommen.

(f) **(2 Punkte)** z.B.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom lautet: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ und hat die Lösungen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ und ist somit ein Beispiel einer positiv definiten Matrix.