Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
C. Mehl, G. Penn-Karras 29.07.2015

Juli – Klausur
Analysis II B für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - y.$$

(i) Geben Sie bei folgenden Ausdrücken an, ob diese erklärt sind, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} f, \quad \operatorname{Hess} f, \quad \Delta f.$$

Hinweis: Hess f bezeichnet die Hessematrix von f.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in dem Entwicklungspunkt $(1,0)$.

2. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben seien die beiden Mengen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 2\},$$

sowie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2xy.$$

(i) Skizzieren Sie die Mengen A und B.

(ii) Integrieren Sie die Funktion f über die Mengen A und B.

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien die Kurven

$$\vec{c}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_1(t) = (t, t^2, t^3)^T,$$

$$\vec{c}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_2(t) = (t, t, t)^T,$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ und $\int_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

(ii) Besitzt $\vec{v}$ ein Potential?

4. Aufgabe

12 Punkte

(i) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch

$$\vec{x} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^3(t) \\ 2\sin^3(t) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie das Volumen des durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

gegebenen Körpers durch Integration.

(iii) Untersuchen Sie, ob das durch

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x(\sin(y) + 1) - e^z \\ 3xyz^2 + \cos(y) \\ \sin(y) - xz^3 \end{pmatrix}$$

gegebene Vektorfeld ein Vektorpotential besitzt.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2\},$$

sowie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x + y^2.$$

Begründen Sie, dass f auf D ein Minimum und ein Maximum annimmt und ermitteln Sie alle globalen Extremstellen.

6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Geben Sie zu folgenden Teilaufgaben jeweils ein Beispiel an. Dabei müssen Sie Ihre Wahl nicht begründen.

(a) Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^3$, welche nicht kompakt ist.

(b) Eine offene nichtleere Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $f \colon B \to \mathbb{R}$, welche auf B weder ihr Minimum, noch ihr Maximum annimmt.

(ii) Begründen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie diese.

(c) Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = 5x^2y - e^{yz}.$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 2, 0)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0)^T$ ist null.

(d) Die Funktion $g \colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^2+y^2)}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Nullpunkt partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 1.$$