Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
C. Mehl, G. Penn-Karras 29.07.2015

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe 8 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - y.$$

(i) Geben Sie bei folgenden Ausdrücken an, ob diese erklärt sind, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} f, \quad \operatorname{Hess} f, \quad \Delta f.$$

Hinweis: $\operatorname{Hess} f$ bezeichnet die Hessematrix von f.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in dem Entwicklungspunkt $(1,0)$.

(i) **(2 Punkte)**
Es sind $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{Hess} f$ und Δf erklärt. Nicht erklärt ist $\operatorname{div} f$, da f kein Vektorfeld ist.Wir erhalten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x+y^2+2y-1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y+2 \end{pmatrix}, \quad \Delta f(x,y) = 4+2y.$$

(ii) **(4 Punkte)** Zunächst bestimmen wir alle kritischen Punkte von f, da nur in diesen lokale Extremstellen bzw. Sattelpunkte vorliegen können. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x+y^2+2y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir unmittelbar

$$x = y.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt

$$y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte von f sind also

$$\vec{x}_1 = (1,1), \quad \vec{x}_2 = (-1,-1).$$

Nun untersuchen wir die Hessematrix von f in den kritischen Punkten auf Definitheit. Wir erhalten

$$\operatorname{Hess} f(\vec{x}_1) = \operatorname{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da der Eintrag oben links (nämlich 2) dieser Matrix positiv ist folgt mit

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

die positive Definitheit, also hat f in $\vec{x}_1$ ein lokales Minimum. Im kritischen Punkt $\vec{x}_2$ liegt wegen

$$\det\big(\operatorname{Hess} f(\vec{x}_2)\big) = \det\big(\operatorname{Hess} f(-1,-1)\big) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

ein Sattelpunkt vor.

(iii) **(2 Punkte)** Das Taylorpolynom $Tf_{(1,0)}$ zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(1,0)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Tf_{(1,0)}(x,y) &= f(1,0) + (x-1, y-0)\operatorname{grad} f(1,0) + \frac{1}{2}(x-1,y-0)\operatorname{Hess} f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + (x-1,y)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2(x-1) - 3y + \frac{1}{2}\big(2(x-1)^2 - 4(x-1)y + 2y^2\big) \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - y. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die beiden Mengen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 2\},$$

sowie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2xy.$$

(i) Skizzieren Sie die Mengen A und B.

(ii) Integrieren Sie die Funktion f über die Mengen A und B.

(i) **(4 Punkte)**

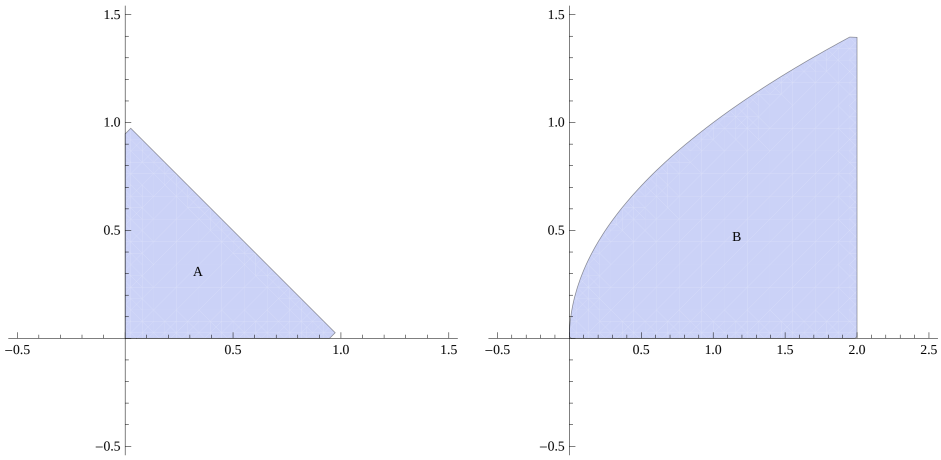

Abbildung 1: Skizze der Menge A (links) und der Menge B (rechts).

(ii) **(4 Punkte)** Für das Integral von f über die Menge A erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 x(x-1)^2\,dx \\ &= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Für das Integral von f über die Menge B erhalten wir

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Kurven

$$\vec{c}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_1(t) = (t, t^2, t^3)^T,$$

$$\vec{c}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_2(t) = (t, t, t)^T,$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ und $\int\limits_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

(ii) Besitzt $\vec{v}$ ein Potential?

(i) **(7 Punkte)** Für die Kurve $\vec{c}_1$ gilt

$$\dot{\vec{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{v}(\vec{c}_1(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot t^2 \\ (t^3 - t^3)(t^3 - t^2) \\ (t^2 - t^2)(t^2 - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{c}_2$ erhalten wir

$$\dot{\vec{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{v}(\vec{c}_2(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot t \\ (t^3 - t)(t - t) \\ (t^2 - t)(t - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int\limits_0^1 \vec{v}(\vec{c}_1(t)) \cdot \dot{\vec{c}}_1(t) \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 t^3 \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{4} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}(\vec{c}_2(t)) \cdot \dot{\vec{c}}_2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - 0\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) **(3 Punkte)** Da $\vec{c}_1(0) = (0,0,0)^T = \vec{c}_2(0)$ und $\vec{c}_1(1) = (1,1,1)^T = \vec{c}_2(1)$, haben $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ die gleichen Anfangs- und Endpunkte. Falls $\vec{v}$ ein Potentialfeld wäre, so wären Kurvenintegrale von $\vec{v}$ wegunabängig. Da die Integrale von $\vec{v}$ über $\vec{c}_1$ bzw. $\vec{c}_2$ nicht übereinstimmen, kann $\vec{v}$ kein Potentialfeld sein.

Alternativ: Falls $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, muss $\vec{v}$ die notwendige Bedingung erfüllen, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ ist. Mit der Notation

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 3x^2(z - y), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = x.$$

Damit ist

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ 3x^2(z - y) - x \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$ für $x = 1$, $y = z = 0$. Da $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist, ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld.

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien der Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(\sin(y)+1) - e^z \\ 3xyz^2 + \cos(y) \\ \sin(y) - xz^3 \end{pmatrix}.$$

(i) Parametrisieren Sie die gesamte Oberfläche ∂K des Körpers.

(ii) Berechnen Sie das Volumen von K durch Integration.

(iii) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals $\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O}$.

(i) **(4 Punkte)** Die Oberfläche von K besteht aus den Teilflächen

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z \leq 1\}$$

und

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z = 1\}.$$

Mit den Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$, lassen sich die Flächen als

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \mid \rho^2 = z \leq 1, \rho \geq 0, \phi \in [0,2\pi] \right\}$$

und

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \mid \rho^2 \leq z = 1, \rho \geq 0, \phi \in [0,2\pi] \right\}$$

schreiben. Daher parametrisieren die Abbildungen

$$\Phi_1 : [0,1] \times [0,2\pi] \to F_1, \ \Phi_1(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \rho^2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2 : [0,1] \times [0,2\pi] \to F_2, \ \Phi_2(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Flächen F_1 und F_2 und damit auch $\partial K = F_1 \cup F_2$.

(ii) **(5 Punkte)** Das Volumen von K lässt sich duch $\iiint_K 1 \mathrm{d}V$ berechnen. Wir schreiben K in Zylinderkoordinaten

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \mid \rho^2 \leq z \leq 1, \rho \geq 0, \phi \in [0,2\pi] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Ferner gilt für das Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}z \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi.$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned}\iiint_K 1\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^1 \rho \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [\rho z]_{\rho^2}^1 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho - \rho^3 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\mathrm{d}\phi \\ &= [\frac{1}{4}\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}2\pi - 0 \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

.

(iii) **(3 Punkte)** Da K eine kompakte Menge ist und $\vec{v}$ ein auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld ist, gilt mit dem Satz von Gauß

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\mathrm{d}V.$$

Da zudem

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(x(\sin(y)+1) - e^z) + \frac{\partial}{\partial y}(3xyz^2 + \cos(y)) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(y) - xz^3) \\ &= (\sin(y)+1) + (3xz^2 - \sin(y)) - 3xz^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

gilt, folgt mit der Berechnung aus (ii)

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\mathrm{d}V = \iiint_K 1\mathrm{d}V = \frac{\pi}{2}.$$

---

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Menge

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2\},$$

sowie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x + y^2.$$

Begründen Sie, dass f auf D ein Minimum und ein Maximum annimmt und ermitteln Sie alle globalen Extremstellen.

Als abgeschlossene Kugel ist D kompakt. Da f als Verknüpfung stetiger Abbildungen wieder stetig ist, muss es, nach dem Satz vom Minimum and Maximum, auf D sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annehmen. Es gilt:

$$f'(x,y) = (2\ 2y).$$

Da $f' \neq 0$, gibt es keine lokalen und somit auch keine globalen Extremstellen im Inneren von D. Damit müssen alle Extremstellen auf dem Rand von D liegen. Der Rand von D ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = 2\}$, wobei $g(x,y) := x^2 + y^2$. Es gilt:

$$g'(x,y) = (2x\ 2y).$$

Offenbar gilt $g' \neq 0$ auf dem Rand von D, da sonst $g(x,y) = 0$. Damit können wir die notwendige Bedingung aus dem regulären Fall der Methode von Langrange aufstellen:

$$f'(x,y) = (2\ 2y) = \lambda \cdot (2x\ 2y) = \lambda \cdot g'(x,y),$$

d.h. es muss $2 = \lambda \cdot 2x$ und $2y = \lambda \cdot 2y$ gelten.
Falls $y \neq 0$, so gilt $\lambda = 1$ wegen der zweiten Gleichung, so dass $x = 1$ folgt, woraus wir wegen $x^2 + y^2 = 2$ sofort $y = \pm 1$ erhalten.
Falls $y = 0$, so erhalten wir sofort aus $x^2 + y^2 = 2$: $x = \pm\sqrt{2}$.
Zusammengefasst erhalten wir die kritischen Punkte $(1,1)$, $(1,-1)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$. Es gilt $f(1,1) = 3$, $f(1,-1) = 3$, $f(\sqrt{2},0) = 2\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2},0) = -2\sqrt{2}$. D.h. in den ersten beiden Punkten wird das Maximum angenommen und in dem vierten das Minimum. Das sind die einzigen globalen Extremstellen.

6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Geben Sie zu folgenden Teilaufgaben jeweils ein Beispiel an. Dabei müssen Sie Ihre Wahl nicht begründen.

(a) Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^3$, welche nicht kompakt ist.

(b) Eine offene nichtleere Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$, welche auf B weder ihr Minimum, noch ihr Maximum annimmt.

(ii) Begründen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie diese.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = 5x^2y - e^{yz}.$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2,0)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{17}}(1,-4,0)^T$ ist null.

(d) Die Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^2+y^2)}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Nullpunkt partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1.$$

(i) (a) **(3 Punkte)** Die Menge $A = \mathbb{R}^3$ ist abgeschlossen, aber nicht kompakt, da A unbeschränkt ist.

(b) **(3 Punkte)** Die Menge $B = \mathbb{R}^2$ ist offen und unbeschränkt und die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ nimmt weder ihr Minimum, noch ihr Maximum an.

(ii) (c) **(3 Punkte)** Diese Aussage ist wahr! Mit

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 - ze^{-yz} \\ -ye^{-yz} \end{pmatrix}$$

ist die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2,0)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{17}}(1,-4,0)^T$ gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \operatorname{grad} f(1,2,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) **(3 Punkte)** Diese Aussage ist falsch! Wir erhalten nämlich

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4}{\sin(t^2)} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\sin(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{2t\cos(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t}{2\cos(t^2)} = 0 \neq 1,$$

wobei wir im drittletzten Schritt die Regel von l'Hopital benutzt haben.