Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
C. Mehl, G. Penn-Karras 30.09.2015

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte.

Die Achsen der in Aufgabe 4 dargestellten Koordinatensysteme sind wie üblich linear skaliert.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ x+2y \\ 3z-y \end{pmatrix}$$

und das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xy^2 + yz.$$

(i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob der Ausdruck in der linken Spalte ein Skalarfeld, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$			
$\operatorname{grad}(\operatorname{rot}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			

(ii) Berechnen Sie die definierten Ausdrücke aus Aufgabenteil (i).

2. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + 2yz + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - \frac{1}{3}z^3.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

3. Aufgabe

12 Punkte

Es sei γ der Viertelkreis in der Ebene $y = 0$ mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ von $(1,0,0)$ nach $(0,0,1)$. Gegeben seien außerdem die Kurve $\vec{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot t) \\ t^2 - t \\ t \end{pmatrix},$$

sowie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+y \\ x-2y-2z \\ 6z-2y \end{pmatrix}.$$

(i) Parametrisieren Sie γ.

(ii) Integrieren Sie $\vec{v}$ über γ.

(iii) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ die notwendige und die hinreichende Potentialbedingung erfüllt und bestimmen Sie anschließend ein Potential von $\vec{v}$.

(iv) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

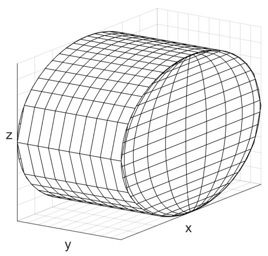
4. Aufgabe

10 Punkte

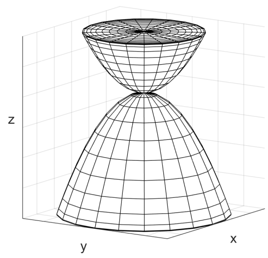
Gegeben seien die Funktionen $\vec{\Phi}_1 : [-1,1] \times [-1,1] \times [-2,1] \to \mathbb{R}^3$ und $\vec{\Phi}_2 : [0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{\Phi}_1(r,s,t) = t \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Phi}_2(r,\phi,h) = \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ h \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

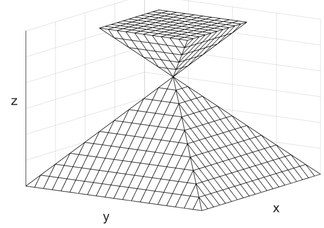
(i) Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Abbildungen die Bildmengen der Funktionen $\vec{\Phi}_1$ und $\vec{\Phi}_2$ darstellen.



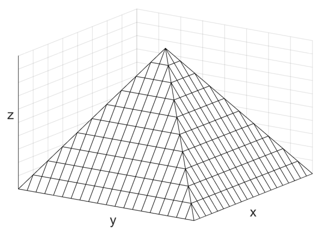
(a)



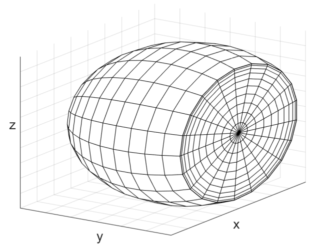
(b)



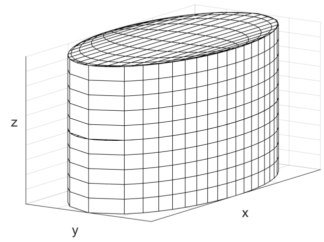
(c)



(d)



(e)



(f)

(ii) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrizen $\vec{\Phi}_1'$ und $\vec{\Phi}_2'$. Weisen Sie nach, dass $\det(\vec{\Phi}_1') = t^2$ und berechnen Sie außerdem $\det(\vec{\Phi}_2')$.

(iii) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint\limits_{\mathrm{Bild}(\vec{\Phi}_1)} x^2 - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die beiden Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 1-2y \end{pmatrix}, \quad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x \\ yz \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{w}$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist.

(i) Eine Parametrisierung der Randkurve der Fläche

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = (1-x^2-y^2)^7,\ z \geq 0\}$$

ist gegeben durch

$$\vec{x}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

(ii) Gegeben sei der Körper

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq (1-x^2-y^2)^7\}.$$

Bestimmen Sie das Flussintegral von $\vec{v}$ durch den Rand von K.

6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Begründen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

und seien $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g_1\colon B \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Dann besitzt die Funktion $h = -f_1 \circ g_1$ ein globales Maximum.

(b) Seien $f_2, g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Nimmt die Funktion f_2 ein globales Minimum unter der Nebenbedingung $g_2 = 0$ an, so ist die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g_2(\vec{x}) = 0\}$ kompakt.

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und nichtleer und sei $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Dann ist $\vec{v}$ konstant.

(ii) Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(d) Die Funktion

$$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{|x|+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

(e) Die Abbildung

$$f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x+y^2-2)-1}{x^2+2y-1}, & \text{falls} \quad x^2+2y \neq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Punkt $(1,0)$ partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(1,0) = -1.$$