Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
C. Mehl, G. Penn-Karras 30.09.2015

Oktober – Klausur
Analysis II B für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ x+2y \\ 3z-y \end{pmatrix}$$

und das Skalarfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xy^2 + yz.$$

(i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob der Ausdruck in der linken Spalte ein Skalarfeld, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$			
$\operatorname{grad}(\operatorname{rot}(f))$			
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$			
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			

(ii) Berechnen Sie die definierten Ausdrücke aus Aufgabenteil (i).

(i) **(3 Punkte)**

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))$		x	
$\operatorname{rot}(\vec{v} \cdot \operatorname{div}(f))$			x
$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$	x		
$\operatorname{grad}(\operatorname{rot}(f))$			x
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$	x		
$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$			x

(ii) **(5 Punkte)** Für die aus dem Aufgabenteil (i) definierten Ausdrücke erhalten wir:

- $\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div} \vec{v})$: Es gilt

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = 0 + 2 + 3 = 5$$

und damit folgt

$$\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div} \vec{v})(x,y,z) = 5 \operatorname{grad} f(x,y,z) = 5 \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy+z \\ y \end{pmatrix}.$$

- $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$: Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + z \\ y \end{pmatrix}$$

und damit folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x,y,z) = 2x.$$

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$: Da $\vec{v}$ zweimal stetig differenzierbar ist folgt unmittelbar

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})(x,y,z) = 0.$$

---

2. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + 2yz + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - \frac{1}{3}z^3.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

Um die Extremstellen und die Sattelpunkte zu bestimmen, bestimmen wir zunächst die kritischen Punkte von f. Wir erhalten den Gradienten

$$\operatorname{grad}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2z + y \\ 2y + 2z - z^2 \end{pmatrix}.$$

Damit $\operatorname{grad}\, f(x,y,z) = \vec{0}$ gilt, muss also $x = 0$ (aus der ersten Gleichung) und $y = -2z$ (aus Gleichung 2) gelten. Mit der dritten Gleichung erhalten wir

$$0 = 2y + 2z - z^2 = -2z - z^2$$

und somit $z = 0$ oder $z = -2$. Die kritischen Punkte von f sind also

$$\vec{x}_1 = (0,0,0), \quad \vec{x}_2 = (0,4,-2).$$

Um die kritischen Punkte weiter zu untersuchen bestimmen wir die Hessematrix von f. Diese ist gegeben durch

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2-2z \end{pmatrix}.$$

Die Definitheit dieser Matrix untersuchen wir nun auf zwei verschiedenen Wegen.

1. Möglichkeit: Bestimmung der Eigenwerte. Im kritischen unkt $\vec{x}_1$ erhalten wir

$$f''(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom p_1 dieser Matrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 4) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 2). \end{aligned}$$

Dies Nullstellen dieses Polynoms (und damit die Eigenwerte der betrachteten Matrix) sind offenbar

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 2}.$$

Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind offenbar positiv, der Eigenwert λ_3 ist negativ. Damit ist die Matrix $f''(\vec{x}_1)$ indefinit und f hat im kritischen Punkt $\vec{x}_1$ einen Sattelpunkt. Im Punkt $\vec{x}_2$ erhalten wir die Hessematrix

$$f''(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom p_2 dieser Matrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_2(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\ = (2-\lambda)((1-\lambda)(6-\lambda) - 4) &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 2). \end{aligned}$$

Dieses hat offenbar die Nullstellen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - 2}, \quad \lambda_3 = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - 2}.$$

Diese sind alle positiv, womit $f''(\vec{x}_2)$ positiv definit ist und f im Punkt $\vec{x}_2$ ein lokales Minimum besitzt.

2. Möglichkeit: Da diese Matrix eine Blockstruktur hat, ist ein Eigenwert (vom oberen Block) 2, die anderen beiden sind die Eigenwerte des unteren Blocks. Im kritischen Punkt $\vec{x}_1$ erhalten wir nun

$$f''(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für den unteren Block gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2.$$

Dieser Block besitzt also einen positiven und einen negativen Eigenwert (da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist) und die Hessematrix von f im Punkt $\vec{x}_1$ ist indefinit. Also hat f in $\vec{x}_1$ einen Sattelpunkt. Im kritischen Punkt $\vec{x}_2$ erhalten wir

$$f''(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hier besitzt der untere Block wegen dem oberen linken Eintrag 1 und

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

zwei positive Eigenwerte und $f''(\vec{x}_2)$ ist insgesamt positiv definit. Also hat f im Punkt $\vec{x}_2$ ein lokales Minimum.

3. Aufgabe

12 Punkte

Es sei γ der Viertelkreis in der Ebene $y = 0$ mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ von $(1,0,0)$ nach $(0,0,1)$. Gegeben seien außerdem die Kurve $\vec{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot t) \\ t^2 - t \\ t \end{pmatrix},$$

sowie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x + y \\ x - 2y - 2z \\ 6z - 2y \end{pmatrix}.$$

(i) Parametrisieren Sie γ.

(ii) Integrieren Sie $\vec{v}$ über γ.

(iii) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ die notwendige und die hinreichende Potentialbedingung erfüllt und bestimmen Sie anschließend ein Potential von $\vec{v}$.

(iv) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

(i) **(2 Punkte)** Eine mögliche Parametrisierung ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) **(3 Punkte)** Ohne Potential: Es gilt

$$\vec{v}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \cos t - 2\sin t \\ 6\sin t \end{pmatrix}$$

sowie

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \cos t - 2\sin t \\ 6\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \mathrm{d}t \\
&= [\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Mit Potential:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= u(\gamma(0)) - u(\gamma(\pi/2)) \\
&= u(1,0,0) - u(0,0,1) \\
&= -2 - (-3) = 1.
\end{aligned}$$

.

(iii) **(5 Punkte)** Der $\mathbb{R}^3$ ist konvex und es gilt

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial y} - \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial z} - \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial x} - \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - (-2) \\ 0 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Damit ist die hinreichende Potentialbedingung erfüllt. Eine Stammfunktion f von $\vec{v}$ genügt

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 2x^2 + xy + c_1(y,z) \\ xy - y^2 - 2yz + c_2(x,z) \\ 3z^2 - 2yz + c_3(x,y) \end{cases}$$

und daher kann $f(x,y,z) = 2x^2 + xy - y^2 - 2yz + 3z^2$ gewählt werden. Somit ist

$$u = -2x^2 - xy + y^2 + 2yz - 3z^2$$

ein Potential von $\vec{v}$.

(iv) **(2 Punkte)** Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, ist das Kurvenintegral wegunabhängig. Es ist

$$\vec{x}(0) = (1, 0, 0) \text{ und } \vec{x}(1) = (0, 0, 1).$$

Da $\vec{x}$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie γ besitzt, ist

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 1.$$

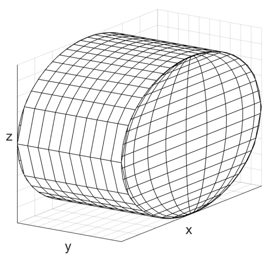
4. Aufgabe

10 Punkte

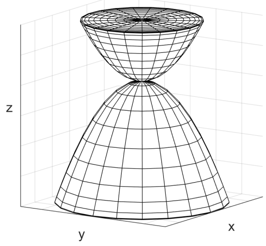
Gegeben seien die Funktionen $\vec{\Phi}_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-2, 1] \to \mathbb{R}^3$ und $\vec{\Phi}_2 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{\Phi}_1(r, s, t) = t \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Phi}_2(r, \phi, h) = \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ h \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

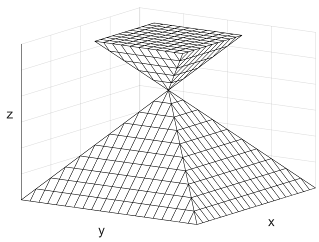
(i) Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Abbildungen die Bildmengen der Funktionen $\vec{\Phi}_1$ und $\vec{\Phi}_2$ darstellen.



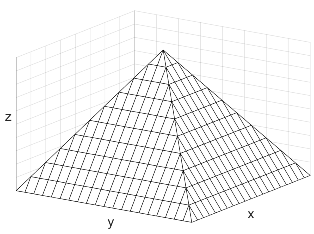
(a)



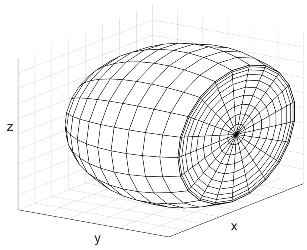
(b)



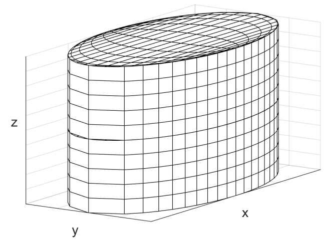
(c)



(d)



(e)



(f)

(ii) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrizen $\vec{\Phi}_1'$ und $\vec{\Phi}_2'$. Weisen Sie nach, dass $\det(\vec{\Phi}_1') = t^2$ und berechnen Sie außerdem $\det(\vec{\Phi}_2')$.

(iii) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_{\mathrm{Bild}(\vec{\Phi}_1)} x^2 - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(i) **(2 Punkte)** (c) stellt das Bild von $\vec{\Phi}_1$ dar und (a) zeigt das Bild von $\vec{\Phi}_2$.

(ii) **(4 Punkte)** Für die Ableitungsmatrizen gilt

$$\vec{\Phi}_1' = \begin{pmatrix} t & 0 & r \\ 0 & t & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\vec{\Phi}_1') = t \cdot t \cdot 1 = t^2,$$

sowie

$$\vec{\Phi}_2' = \begin{pmatrix} 2\cos\phi & -2r\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \end{pmatrix}, ,$$

$$\det(\vec{\Phi}_2') = 0 + (-2r\sin^2\phi) + 0 - 2r\cos^2\phi - 0 - 0 = -2r.$$

(iii) **(4 Punkte)** Mit dem Transformationssatz gilt

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathrm{Bild}(\vec{\Phi}_1)} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1} ((tr)^2 - (ts)) \cdot |\det(\vec{\Phi}_1')| \mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1} r^2t^4 - st^3 \mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{5}r^2t^5 - \frac{1}{4}st^4\right]_{-2}^{1} \mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{33}{5}r^2 + \frac{15}{4}s\mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{66}{5}r^2 + 0\mathrm{d}r \\
&= \frac{44}{5}.
\end{aligned}$$

---

5. Aufgabe

10 Punkte

(i) Gegeben sei der Bereich $A \subset \mathbb{R}^2$, der von den Geraden $x = 0$ und $y = x - \frac{\pi}{2}$ und der Kurve $y = \cos x$ eingeschlossen wird.

(a) Skizzieren Sie A.

(b) Integrieren Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \cos(x)$ über A.

(ii) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ye^{xyz} - (x + z)$, sowie die Fläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x, y, z) = 1\}.$$

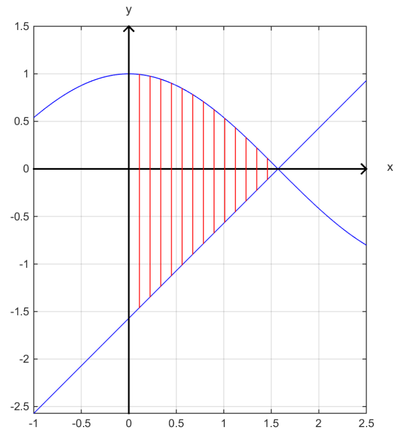
Zeigen Sie: Der Vektor $(6, 2, -2)$ steht senkrecht auf F im Punkt $(0, 2, 1) \in F$.

(i) **(6 Punkte)**

(a)

(b) Zunächst müssen wir den Schnittpunkt der Geraden $y = x - \frac{\pi}{2}$ mit $y = \cos x$ berechnen. Äquivalent ist eine Nullstelle von $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{2} - x$ gesucht. Man sieht, dass $f(\pi/2) = 0$. Ferner ist $\frac{\pi}{2}$ wegen $f'(x) = -\sin(x) - x \leq 0$ die einzige Nullstelle. Daher ist der Bereich A gegeben durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } x - \frac{\pi}{2} \leq y \leq \cos x$$



und es gilt

$$
\begin{aligned}
\iint_A g(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} \cos x \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\cos x - x + \frac{\pi}{2})\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - x\cos x + \frac{\pi}{2}\cos x\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}(\cos x \sin x + x) - (x\sin x + \cos x) + \frac{\pi}{2}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= (\frac{1}{2}(0\cdot 1 + \frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0) + \frac{\pi}{2}\cdot 1) - (\frac{1}{2}(1\cdot 0 + 0) - (0\cdot 0 + 1) + \frac{\pi}{2}\cdot 0) \\
&= \frac{1}{4}\pi + 1.
\end{aligned}
$$

(ii) **(4 Punkte)** F ist die Niveaufläche von f zum Niveau 1 und der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen. Es ist

$$
\nabla f = \begin{pmatrix} y^2 z e^{xyz} - 1 \\ (xyz+1)e^{xyz} \\ xy^2 e^{xyz} - 1 \end{pmatrix}
$$

und somit $\nabla f(0,2,1) = (3,1,-1) = \frac{1}{2}(6,2,-2)$. Da der Gradient in $(0,2,1)$ parallel zu $(6,2,-2)$ ist, folgt, dass $(6,2,-2)$ senkrecht auf F steht.

6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Begründen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

und seien $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g_1 \colon B \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Dann besitzt die Funktion $h = -f_1 \circ g_1$ ein globales Maximum.

(b) Seien $f_2, g_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Nimmt die Funktion f_2 ein globales Minimum unter der Nebenbedingung $g_2 = 0$ an, so ist die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g_2(\vec{x}) = 0\}$ kompakt.

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und nichtleer und sei $\vec{v} \colon D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Dann ist $\vec{v}$ konstant.

(ii) Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(d) Die Funktion

$$f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{|x|+y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig.

(e) Die Abbildung

$$f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x+y^2-2)-1}{x^2+2y-1}, & \text{falls } \quad x^2 + 2y \neq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Punkt $(1, 0)$ partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(1, 0) = -1.$$

(i) **(6 Punkte)**

(a) Diese Aussage ist wahr! Die beiden Funktionen f_1 und g_1 sind differenzierbar, also insbesondere auch stetig. Damit ist h als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig und nimmt auf der kompakten Menge B ihr Maximum an.

(b) Diese Aussage ist falsch! Ein Gegenbeispiel liefern die beiden konstanten Abbildungen $f_2, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x, y) = g_2(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, denn f_2 nimmt überall unter der Nebenbedingung $g_2 = 0$ das Minimum 0 an (dies ist auch gleichzeitig das Maximum), die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, g_2(\vec{x} = 0\}$ ist aber der gesamte $\mathbb{R}^2$ und daher nicht kompakt.

(c) Diese Aussage ist falsch! Ein Gegenbeispiel ist das zentrale Kraftfeld

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{r^3},$$

welches auf der offenen Menge $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ definiert ist, denn aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

(ii) **(6 Punkte)**

(d) Die Folge $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgegliedern

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

konvergiert gegen den Punkt $(0,0)$. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) - f(0,0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left|\frac{1}{n}\right| + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}} - 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ unstetig.

(e) Die partielle Ableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_4(1+h,0) - f_4(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2+2h-2) - 1}{h((1+h)^2 - 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h^3 + 2h^2}.$$

Da sowohl Zähler, als auch Nenner gegen 0 konvergiert können wir die Regel von l'Hopital anwenden. Wir erhalten

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{-h^3 - 2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(2h)}{3h^2 + 4h}.$$

Erneut können wir die Regel von l'Hopital anwenden, es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(2h)}{3h^2 + 4h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4\cos(2h)}{6h + 4} = -1.$$