Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe

WS 15/16
23.02.2016

Februar – Klausur
Analysis II B für Ingenieurswissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ xyz^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (a) div $\vec{v}$, (b) rot $\vec{v}$, (c) grad div $\vec{v}$, (d) div rot $\vec{v}$.

Besitzt $\vec{v}$ ein Potential? Besitzt es ein Vektorpotential?

2. Aufgabe

10 Punkte

Wir betrachten die Funktion mit dem Definitionsbereich $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 3x > 0\}$,

$$f \ : \ D \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \ln(y - 3x).$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades Tf der Funktion f mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(b) Skizzieren Sie zur Funktion f die beiden Niveaulinien für $c = 0$ und $c = \ln(2)$ und zeichnen Sie den Gradienten $\nabla f(0, 1)$ in die Skizze ein.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ im Entwicklungspunkt in Richtung $\vec{a} = (1, 3)^T$. Wie können Sie das Ergebnis interpretieren?

3. Aufgabe

14 Punkte

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^3y - 3xy + y^2 + 1 .$$

Berechnen Sie die lokalen Extrema und Sattelpunkte von f. Untersuchen Sie außerdem, ob sich unter den lokalen Extrema auch globale Extrema befinden.

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Untersuchen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

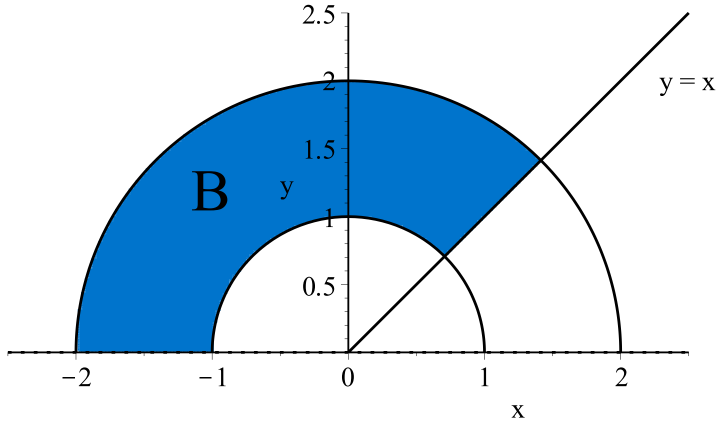
(a) In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion f stetig?

(b) In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion f nach x bzw. y partiell differenzierbar? Bestimmen Sie die partielle Ableitungen in den Punkten, in denen sie existieren.

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei der Bereich B wie skizziert, die Ränder seien dabei in B enthalten.



(a) Beschreiben Sie den Bereich B (in Mengenschreibweise) mit Hilfe geeigneter Koordinaten.

(b) Berechnen Sie für $f(x,y) = xy$ das Mehrfachintegral $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$.

(*Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$)

6. Aufgabe

15 Punkte

Gegeben sei die elliptische Koordinatentransformation

$$\vec{x} : [0,\infty[\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} a\,r\cos\varphi \\ b\,r\sin\varphi \end{pmatrix} \text{ mit } a,b > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminate $\det \vec{x}'(r,\varphi)$ der Koordinatentransformation.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie für $a = 3, b = 2$ und $U = [0,1] \times [0,2\pi]$ den Bereich $B = \vec{x}(U)$ und berechnen Sie den Flächeninhalt von B.

(c) (i) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers K mit Grundfläche B in der xy-Ebene, der nach oben durch den Funktionsgraphen $z = f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ begrenzt ist.

(ii) Gegeben seien die beiden Vektorfelder

$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto xy\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto xy\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Arbeitsintegrale

$$\int_{\partial B} \vec{v}\cdot d\vec{s} \qquad \text{sowie} \qquad \int_{\partial B} \vec{w}\cdot d\vec{s}.$$

Tipp: $\int \cos(t)^2 \sin^2(t)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(t)^3\sin(t) + \frac{1}{8}\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{8}t + C$