Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 15/16
G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe 23.02.2016

Februar – Klausur
Analysis II B für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe — 6 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ xyz^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (a) div $\vec{v}$, (b) rot $\vec{v}$, (c) grad div $\vec{v}$, (d) div rot $\vec{v}$.

Besitzt $\vec{v}$ ein Potential? Besitzt es ein Vektorpotential?

(a) $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$

(b) $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \nabla \times \vec{v}(x, y, z) = (xz^2 - xy^2, x^2y - yz^2, y^2z - x^2z)^T$

(c) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = 6(yz, xz, xy)^T$

(d) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 = 0$

Da die notwendige Bedingung weder für ein Potential noch für ein Vektorpotential erfüllt ist, besitzt $\vec{v}$ weder das eine, noch das andere.

---

2. Aufgabe — 10 Punkte

Wir betrachten die Funktion mit dem Definitionsbereich $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 3x > 0\}$,

$$f \ : \ D \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \ln(y - 3x).$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades Tf der Funktion f mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(b) Skizzieren Sie zur Funktion f die beiden Niveaulinien für $c = 0$ und $c = \ln(2)$ und zeichnen Sie den Gradienten $\nabla f(0, 1)$ in die Skizze ein.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ im Entwicklungspunkt in Richtung $\vec{a} = (1, 3)^T$. Wie können Sie das Ergebnis interpretieren?

(a) **(5 Punkte)** Für das Taylorpolynom benötigen wir die 1. und 2. Ableitung, die wir zunächst formal berechnen:

$$f'(x, y) = \frac{1}{y - 3x}(-3, 1) \qquad H_f(x, y) = \frac{1}{(y - 3x)^2} \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

und am Punkt $(0, 1)$:

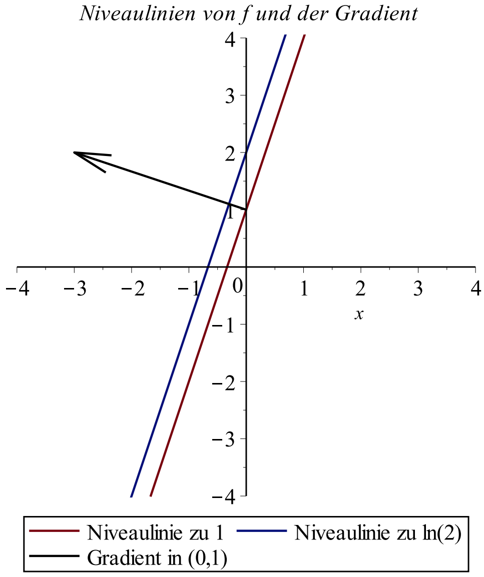
$$f(0, 1) = 0 \qquad f'(0, 1) = (-3, 1) \qquad H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für das Taylorpolynom Tf folgt:

$$\begin{aligned} Tf(x,y) &= f(0,1) + f'(0,1)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} H_f(0,1)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ &= 0 - 3x + y - 1 + \frac{1}{2}(-9x^2 + 6x(y-1) - (y-1)^2) \\ &= -\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 3xy - 6x + 2y - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(b) **(3 Punkte)** Für die Skizze berechnen wir zunächst die Funktionen, die darzustellen sind,

$$\begin{aligned} 0 = f(x,y) &\implies e^0 = e^{\ln(y-3x)} \implies \ln(y-3x) = 0 \implies y = 3x+1 \\ \ln(2) = f(x,y) &\implies e^{\ln(2)} = e^{\ln(y-3x)} \implies y = 3x+2. \end{aligned}$$



(c) **(2 Punkte)** Richtungsableitung im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(1,3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f(0,1)\cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Der Wert Null der Richtungsableitung zeigt, dass im Punkt $(0,1)$ in Richtung $\vec{a}$ die Niveaulinie verläuft.

3. Aufgabe

14 Punkte

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^3y - 3xy + y^2 + 1 .$$

Berechnen Sie die lokalen Extrema und Sattelpunkte von f. Untersuchen Sie außerdem, ob sich unter den lokalen Extrema auch globale Extrema befinden.

Wir ermitteln zuerst die Ableitungen 1. und 2.Ordnung:

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y(x^2-1) \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2-3 \\ 3x^2-3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir werten die notwendige Bedingung 1.Ordnung aus, um „Kandidaten“ für Extrema zu finden:

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3y(x^2-1) \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} = 0$$

Offensichtlich ist $\mathbf{P_1} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ eine Lösung der Gleichung. Für $x = 1$ folgt $y = 1$ und somit $\mathbf{P_2} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ und ebenfalls $\mathbf{P_3} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$. Für $y = 0$ gilt $x(x^2 - 3) = 0$ in der zweiten Gleichung, als Lösung erhalten wir $x = \pm\sqrt{3}$. Somit folgt $\mathbf{P_4} = (\sqrt{\mathbf{3}}, \mathbf{0})$ und $\mathbf{P_5} = (-\sqrt{\mathbf{3}}, \mathbf{0})$. In diesen Punkten untersuchen wir jetzt, welche Arten von Extrema vorliegen. Dazu verwenden wir die Hessematrix:

$$P_1 : \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(0,0) < 0 \Longrightarrow \text{ indefinit}$$

$$P_2 : \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2 \Longrightarrow \textbf{positiv definit}$$

$$P_3 : \qquad H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2 \Longrightarrow \textbf{positiv definit}$$

$$P_4 : \qquad H_f(\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(\sqrt{3},0) < 0 \Longrightarrow \text{ indefinit}$$

$$P_5 : \qquad H_f(-\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(-\sqrt{3},0) < 0 \Longrightarrow \text{ indefinit.}$$

Nur die Punkte $\mathbf{P_2}$ und $\mathbf{P_3}$ sind lokale Minima. In den restlichen Punkten liegen Sattelpunkte vor.

Für die Funktionswerte gilt:

$$f(P_1) = 1 \qquad f(P_2) = 0 \qquad f(P_3) = 0 \qquad f(P_4) = 1 \qquad f(P_5) = 1.$$

Für die globalen Extremwerte können wir z.B. folgende Grenzwerte betrachten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x, y = 1) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x, y = 1) = -\infty.$$

Somit ist die Funktion unbeschränkt nach oben und unten und es liegen keine globalen Extrema vor.

---

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

(a) In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion f stetig?

(b) In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion f nach x bzw. y partiell differenzierbar? Bestimmen Sie die partielle Ableitungen in den Punkten, in denen sie existieren.

(a) **(4 Punkte)** Außerhalb des kritischen Punkts $(x, y) = (0, 0)$ ist die Funktion stetig, als Komposition stetiger Funktionen. Wir untersuchen den Punkt $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|2x^2\right| \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|2x^2\right| = 0,$$

somit ist die Funktion f auch in $(0, 0)$ und damit in allen Punkten (x, y) stetig.

(b) **(4 Punkte)** Die partiellen Ableitungen existieren, außerhalb von $(0, 0)$, da f als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar und somit auch partiell differenzierbar ist. Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen außerhalb von $(x, y) = (0, 0)$ mittels bekannter Ableitungsregeln:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

Nun zum kritischen Punkt $(x, y) = (0, 0)$, hier gilt

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(0+h)^2\cdot 0^2}{(0+h)^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

und

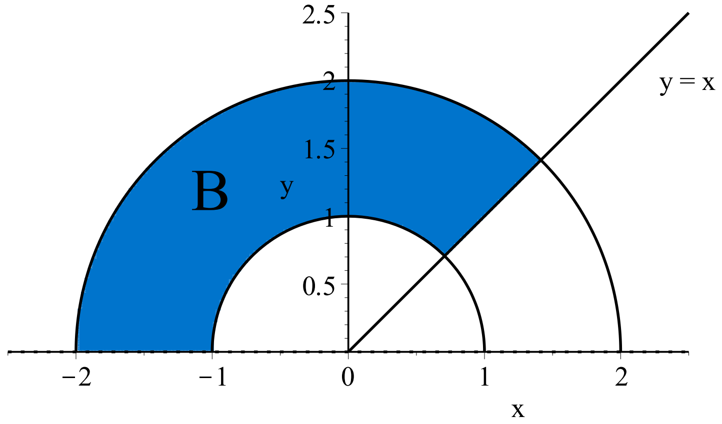
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0^2\cdot(0+h)^2}{0^2+(0+h)^2} - 0}{h} = 0.$$

Damit haben wir die Existenz der partiellen Ableitungen in allen Punkten (x, y) nachgewiesen.

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei der Bereich B wie skizziert, die Ränder seien dabei in B enthalten.



(a) Beschreiben Sie den Bereich B (in Mengenschreibweise) mit Hilfe geeigneter Koordinaten.

(b) Berechnen Sie für $f(x, y) = xy$ das Mehrfachintegral $\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$.

(*Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$)

(a) **(3 Punkte)** Es gilt in Polarkoordinaten folgende Mengenbeschreibung

$$B = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in [1, 2], \varphi \in [\tfrac{\pi}{4}, \pi]\right\}$$

und alternativ in kartesischen Koordinaten:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0, x \le y\}.$$

(b) **(4 Punkte)** Hier nutzen wir den Transformationssatz:

$$\iint_B xy\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 r^2 \cos\varphi \sin\varphi\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{15}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Wir substituieren $z = \sin\varphi$:

$$\int \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \int z \, dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\sin^2\varphi}{2}.$$

und somit folgt

$$\frac{15}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{15}{4}\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{15}{8}\sin^2\frac{\pi}{4} = -\frac{15}{16}.$$

---

6. Aufgabe

15 Punkte

Gegeben sei die elliptische Koordinatentransformation

$$\vec{x} : [0,\infty[\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} a\,r\cos\varphi \\ b\,r\sin\varphi \end{pmatrix} \text{ mit } a,b > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminate $\det \vec{x}'(r,\varphi)$ der Koordinatentransformation.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie für $a = 3, b = 2$ und $U = [0,1]\times[0,2\pi]$ den Bereich $B = \vec{x}(U)$ und berechnen Sie den Flächeninhalt von B.

(c) (i) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers K mit Grundfläche B in der xy-Ebene, der nach oben durch den Funktionsgraphen $z = f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ begrenzt ist.

(ii) Gegeben seien die beiden Vektorfelder

$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto xy\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto xy\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Arbeitsintegrale

$$\int_{\partial B} \vec{v}\cdot d\vec{s} \qquad \text{sowie} \qquad \int_{\partial B} \vec{w}\cdot d\vec{s}.$$

Tipp: $\int \cos(t)^2 \sin^2(t)\, dt = -\frac{1}{4}\cos(t)^3\sin(t) + \frac{1}{8}\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{8}t + C$

(a) **(2 Punkte)** Für die Funktionaldeterminate benötigen wir die Ableitung der Koordinatentransformation und deren Betrag der Determinante,

$$\vec{x}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \vec{x}'(r,\varphi) = abr.$$

Die Funktionaldeterminate beträgt abr.

(b) **(5 Punkte)** Skizze:

Hier können wir gleich die elliptischen Polarkoordinaten nutzen. Es gilt

$$\iint_B dx\,dy = \iint_B abr\,d\varphi\,dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6r\,d\varphi dr = 12\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 6\pi \text{ FE}.$$

(c) **(2+6 Punkte)**

i) Eine Beschreibung der Menge B bekommen wir aus einem der vergangenen beiden Teile. Mit dem Transformationssatz gilt:

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \iint\limits_B \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\,dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{4r^2\sin^2\varphi}{4}\right) \cdot 6r\,d\varphi dr \\ &= \int\limits_0^1 12\pi r^3 d\varphi = 3\pi. \end{aligned}$$

ii) Wir beginnen mit dem Vektorfeld $\vec{v}_1$. Zunächst testen wir die Integrabilitätsbedingung (symmetrische Funktionalmatrix), es gilt

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

Da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ offen und konvex ist, folgern wir, dass das Vektorfeld $\vec{v}_1$ ein Potentialfeld ist. Das Arbeitsintgral können wir sofort berechnen:

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Alternativ: Über Potential $u = -\frac{1}{2}x^2y^2$, was man leicht sieht. Weiterhin benötigen wir die Parametrisierung der Kurve,

$$\vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 2\sin\phi \end{pmatrix} \qquad \phi \in [0, 2\pi].$$

Es folgt

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{s} = u(\vec{x}(0)) - u(\vec{x}(2\pi)) = 0.$$

Für das Vektorfeld $\vec{w}$ können wir ebenfalls die Integrabilitätsbedingung testen:

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = y^2 \neq x^2 = \frac{\partial w_1}{\partial y},$$

somit existiert kein Potential für $\vec{w}$. Für die Berechnung des Arbeitsintegrals benötigen wir im vektoriellen Kurvenelement die Ableitung der Parametrisierung des Randes von B:

$$\vec{x}'(\phi) = \begin{pmatrix} -3\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix} \qquad \phi \in [0, 2\pi].$$

Mit diesen Vorbereitungen ermitteln wir für das Arbeitsintegral,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \vec{w} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{w}(\vec{x}(\phi)) \cdot \vec{x}'(\phi)\,d\phi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 18\cos^2\phi\sin\phi \\ 12\cos\phi\sin^2\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} -54\cos^2\phi\sin^2\phi + 24\cos^2\phi\sin^2\phi\,d\phi = \int_0^{2\pi} -30\cos^2\phi\sin^2\phi\,d\phi = -\frac{15}{2}\pi. \end{aligned}$$