Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 15/16
G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe, G. Penn-Karras 11.04.2016

April – Klausur
Analysis II für Ingenieurswissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

☐ Prüfungsklausur (8 LP) ☐ Prüfungsklausur (9 LP mit HA) ☐ Weiß nicht
☐ Übungsscheinklausur ☐ Prüfungsklausur (6 LP ohne HA)

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 11 Punkte

Skizzieren Sie den Integrationsbereich B, und berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ für

(a) $f(x,y) = x^2y$ mit der Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3 - 2x\}$,

(b) $f(x,y) = xy$, mit der Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Aufgabe 14 Punkte

Gegeben seien die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = 5\}$$

und die Funktion

$$f : G \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto |\vec{x}|.$$

(a) Berechnen Sie die Kandidaten für Extremstellen von f in G mit dem Lagrange-Verfahren.

(b) Skizzieren Sie die Menge G und zeichnen Sie die berechneten möglichen Extremstellen in die Zeichnung ein.

(c) Warum ist der Satz vom Minimum und Maximum nicht anwendbar?

(d) Erläutern Sie, welche geometrische Bedeutung der Funktionswert $f(\vec{x})$ hat. Erklären Sie dann, anhand Ihrer Skizze, ob f ein globales Maximum bzw. ein globales Minimum (in G) besitzt. Geben sie an, ob das jeweilige Extremum in einem der berechneten Punkte aus a) angenommen wird.

3. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben seien die beiden Funktionen

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, (ii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin(2x)}{x^2+4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Bestimmen Sie jeweils die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k, y_k)$, für die beiden Folgen $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0)$ und $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$

(Hinweis: Statt der obigen Folgen dürfen Sie auch die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ betrachten. Analoges gilt für g.)

(b) Lässt sich aus den erhaltenen Ergebnissen eine Aussage bzgl. der Stetigkeit von f bzw. g im Punkt $(0,0)$ treffen? Begründen Sie dieses.

4. Aufgabe

10 Punkte

Es seien die Vektorfelder $\vec{v}_i$ und die Parametrisierungen $\vec{c}_i$

$$\vec{v}_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -z \\ y^2 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{c}_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und

$$\vec{v}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \vec{c}_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t}\cos^2(\pi - t) \\ t^2 \sin^3 t \\ \sqrt{t(\pi - t)} \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale

$$\int_{\vec{c}_1} \vec{v}_1 \cdot \vec{ds} \qquad \text{und} \qquad \int_{\vec{c}_2} \vec{v}_2 \cdot \vec{ds}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien für $\lambda \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$\vec{w}_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} \lambda x + z^2 - y \\ \lambda x^2 + x \\ x^2 + y^2 + \lambda xz \end{pmatrix},$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z - 2x \\ 2 \end{pmatrix},$$

(a) Für welchen Wert von λ ist w_λ ein Vektorpotential von $\vec{v}$?

(b) Es sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1 - (x^2 + y^2),\ z \geq 0\}$. Skizzieren Sie S und berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{dO}.$$

Hinweis: Hier ist ein Integralsatz anwendbar.

6. Aufgabe

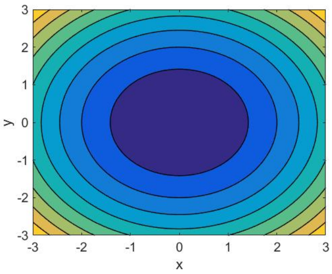
6 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

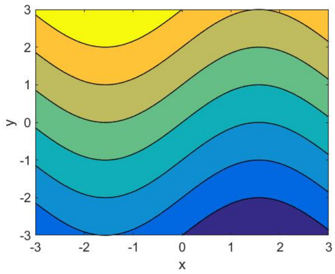
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad f(x,y) = x^2 + 2y \\ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad g(x,y) = \sin(x) \\ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad h(x,y) = y - \sin(x) \end{aligned}$$

Ordnen Sie den Abbildungen f, g und h die entsprechende Skizze der Niveaulinien zu. Kreuzen sie dazu die zugehörige Box unter dem Bild an.

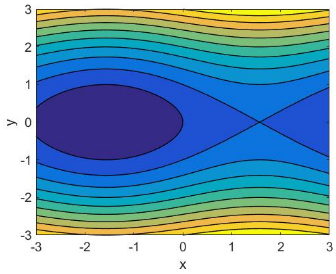
Hinweis: Zu jeder Abbildung gehört genau eine Skizze. In den Skizzen verläuft die x-Achse von links nach rechts und die y-Achse von unten nach oben.



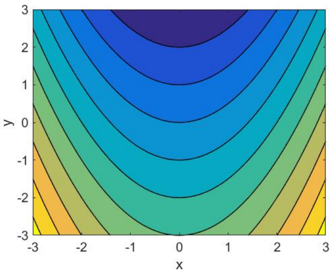
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



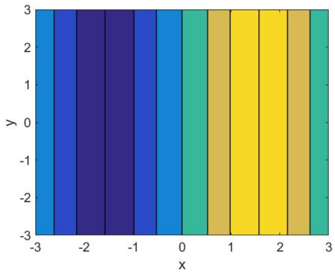
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



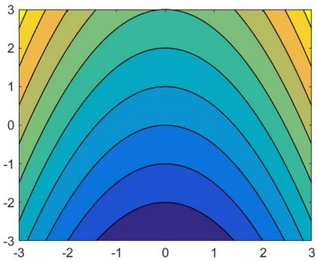
$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$



$f\colon \square,\ g\colon \square,\ h\colon \square$