Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 16

C. Mehl, G. Penn-Karras 25.07.2016

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Die Aufgabenblätter sind mit abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

(i) Gegeben seien die folgenden zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und geben Sie an, ob es sich in diesem Fall bei dem jeweiligen Ausdruck um ein Skalar- oder ein Vektorfeld handelt. Sollte der jeweilige Ausdruck nicht definiert sein, begründen Sie Ihre Antwort!

(a) ∇f,
(b) $\operatorname{rot}(\vec{v})$,
(c) $(\nabla f) \cdot (\nabla g)$,
(d) $\operatorname{rot}(\nabla g)$,
(e) $\operatorname{div}(\nabla(\operatorname{div}(\vec{v})))$,
(f) Δf,
(g) $\vec{v} \cdot (\nabla f)$.

(ii) Es sei

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ xy^2 \\ w_3(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein $w_3(x,y,z)$ an, so dass gilt, dass

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = 0.$$

(iii) Besitzt

$$\vec{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{q}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix},$$

ein Vektorpotential?

2. Aufgabe

12 Punkte

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$, und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(ii) Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f (aus (i)) im Entwicklungspunkt $(2,1)$ an.

(iii) Gegeben sei die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = 1 + yx$. Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Funktionswert, den h auf der durch $x^2 + y^2 = 1$ beschriebenenen Menge annimmt.

3. Aufgabe

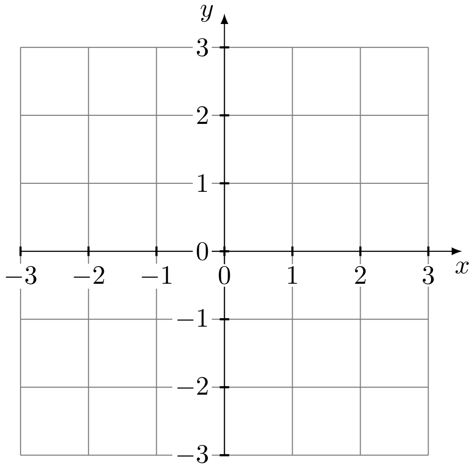
10 Punkte

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge, die von der Parabel $y = -x^2 + 1$ und der Geraden $y = -(x+1)$ eingeschlossen wird. Weiterhin sei

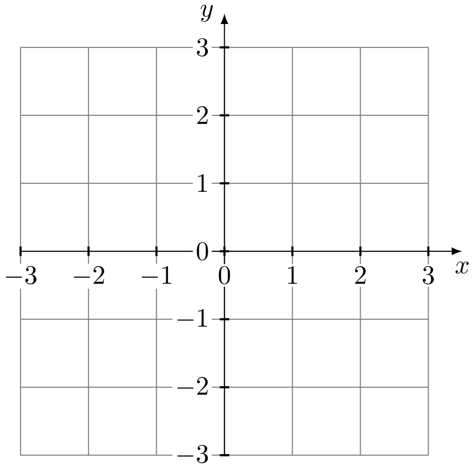
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \leq 1,\ y \geq 0 \right\}.$$

(i) Skizzieren Sie die Mengen A und B jeweils in den unten gegebenen Koordinatenkreuzen.

A



B



(ii) Berechnen Sie

$$\iint_A (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

sowie

$$\iint_B 4x^2 + 3\sqrt{x^2+y^2} + 4y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Es seien $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ und $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$. Weiterhin sei das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y \\ y + z \end{pmatrix},$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch D in Richtung der positiven z-Achse.

(ii) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch den Teil der Oberfläche von Z, der nicht in der Ebene $z = 1$ liegt.

5. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, z) = x \ln(y^2 + 1) + e^z,$$

eine partiell differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\vec{x}} \nabla(f) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

wobei $\vec{x} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve sei mit

$$\vec{x}(0) = -\vec{x}(\pi),$$
$$\vec{x}(\pi) = -\vec{x}(2\pi).$$

(ii) Es sei $\vec{\gamma}$ der Halbkreis in der Ebene $x = 0$ mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ von $(0, 0, 2)$ nach $(0, 0, -2)$, welcher den Punkt $(0, 2, 0)$ enthält. Parametrisieren Sie $\vec{\gamma}$.

(iii) Es sei das folgende Vektorfeld gegeben

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x - y - z \\ 4y - x \\ 2z - x \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ die notwendige und hinreichende Potentialbedingung erfüllt, und bestimmen Sie anschließend alle Potentiale von $\vec{v}$.

(iv) Es seien $\vec{\gamma}$ wie in (ii) und $\vec{v}$ wie in (iii). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(i) Die stetige Funktion $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 + 2y^2$, nimmt auf der Menge

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$$

weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum an.

(ii) Es sei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Die stetige Funktion $f \colon B \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2 + x$, nimmt ein globales Minimum und ein globales Maximum an und diese liegen auf dem Rand von B.

(iii) Sei $\vec{v} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{c}$ die Einheitskreislinie um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$. Gilt $\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$, dann hat $\vec{v}$ ein Potential.

(iv) Die partielle Ableitung der Funktion

$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 - y^2)}{y^2}, & \text{falls } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

nach y im Punkt $(0, 0)$ ist -1.