Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 16
C. Mehl, G. Penn-Karras 25.07.2016

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe 11 Punkte

(i) Gegeben seien die folgenden zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und geben Sie an, ob es sich in diesem Fall bei dem jeweiligen Ausdruck um ein Skalar- oder ein Vektorfeld handelt. Sollte der jeweilige Ausdruck nicht definiert sein, begründen Sie Ihre Antwort!

(a) ∇f,
(b) $\operatorname{rot}(\vec{v})$,
(c) $(\nabla f) \cdot (\nabla g)$,
(d) $\operatorname{rot}(\nabla g)$,
(e) $\operatorname{div}(\nabla(\operatorname{div}(\vec{v})))$,
(f) Δf,
(g) $\vec{v} \cdot (\nabla f)$.

(ii) Es sei

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ xy^2 \\ w_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein $w_3(x, y, z)$ an, so dass gilt, dass

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = 0.$$

(iii) Besitzt

$$\vec{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{q}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix},$$

ein Vektorpotential?

(i) **(7 Punkte)**

(a) f ist eine Skalarfeld, also ist der Gradient von f definiert. Dieser ist ein Vektorfeld (im $\mathbb{R}^3$).
Definiert.
Vektorfeld.

(b) $\vec{v}$ ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, also ist dessen Rotation definiert, welche ein Vektorfeld ist.
Definiert.
Vektorfeld.

(c) Der Gradient von f ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, der Gradient von g jedoch ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$. Das Skalarprodukt der beiden ist damit nicht definiert.
Nicht definiert.

(d) Der Gradient von g ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$, damit ist dessen Rotation nicht definiert.
Nicht definiert.

(e) Die Divergenz ist für jedes Vektorfeld definiert, und ein Skalarfeld. Damit ist auch der Gradient der Divergenz ist definiert. Da $\vec{v}$ ein Vektorfeld ist, ist der Ausdruck definiert.
Definiert.
Skalarfeld.

(f) Der Laplace-Operator ist für Skalarfelder definiert und nach Definition ein Skalarfeld. Da f ein solches ist, ist der Ausdruck definiert.
Definiert.
Skalarfeld.

(g) $\vec{v}$ ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, genauso wie der Gradient der Funktion f. Damit ist das Skalarprodukt der beiden definiert und ein Skalarfeld.
Definiert.
Skalarfeld.

(ii) **(2 Punkte)** Für die Divergenz von $\vec{w}$ gilt

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = 2z + 2xy + \frac{\partial w_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Es ist dann leicht zu sehen (zur Not durch Integration), dass für w_3

$$w_3(x, y, z) = -z^2 - 2xyz + const$$

gelten muss.

(iii) **(2 Punkte)** Es gilt

$$\operatorname{div}(\vec{q}) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Außerdem ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ von $\vec{q}$ offen und konvex.

Also besitzt $\vec{q}$ ein Vektorpotential.

2. Aufgabe 12 Punkte

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$, und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(ii) Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f (aus (i)) im Entwicklungspunkt $(2, 1)$ an.

(iii) Gegeben sei die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = 1 + yx$. Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Funktionswert, den h auf der durch $x^2 + y^2 = 1$ beschriebenenen Menge annimmt.

(i) **(6 Punkte)** Der Gradient von f berechnet sich zu

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 12y^2 - 24y \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Stellen von f sind die Lösungen der Gleichungen $\nabla f(x, y) = \vec{0}$. Dieses Gleichungssystem ist gegeben durch

$$0 = 6xy - 6x = 6x(y - 1),$$
$$0 = 3x^2 + 12y^2 - 24y.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 1$.

1. Fall Ist $x = 0$, dann reduziert sich die zweite Gleichung auf $12y(y - 2) = 0$ und wir finden die beiden kritischen Stellen $(0, 0)$ und $(0, 2)$.

2. Fall Ist $y = 1$, reduziert sich die zweite Gleichung auf $0 = 3(x^2 - 4)$ und wir finden die kritischen Stellen $(2, 1)$ und $(-2, 1)$.

Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 24y-24 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich folgendes Bild:

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, da Diagonalmatrix mit negativen Einträgen. $\to$ Lok. Max. bei $(0,0)$.
- $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, da Diagonalmatrix mit positiven Einträgen. $\to$ Lok. Min. bei $(0,2)$.
- $H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, da die Determinante negativ ist. $\to$ Sattelpunkt bei $(2,1)$.
- $H_f(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, da die Determinante negativ ist. $\to$ Sattelpunkt bei $(-2,1)$.

(ii) **(2 Punkte)** Aus (i) ist bekannt, dass

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für das Taylorpolynom T_f zweiten Grades von f im Entwicklungspunkt $(2,1)$

$$\begin{aligned} T_f(2+\Delta x, 1+\Delta y) &= f(2,1) + \nabla f(2,1)\cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} H_f(2,1) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= -7 + 12\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} T_f(x,y) &= f(2,1) + \nabla f(2,1)\cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} H_f(2,1) \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= -7 + 12(x-2)(y-1) \\ &= 12xy - 12x - 24y + 17. \end{aligned}$$

(iii) **(4 Punkte)** Sei $g(x,y) = x^2 + y^2$. Da das 1-Niveau von g der Einheitskreis ist, dieser kompakt sowie h stetig ist, nimmt h auf dem 1-Niveau von g sowohl ein Minimum als auch ein Maximum an. Nach dem Ansatz von Lagrange sind alle dafür in Frage kommenden Punkte die Lösung von

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y) &= \vec{0}, \\ g(x,y) &= 1, \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} \nabla h(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \text{ und } \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Da $\nabla g(x,y) = 0$ nur für $(x,y) = (0,0)$, aber $g(0,0) \neq 1$, gibt es keine singulären Punkte. Das rechte Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ 1 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Da wir $(0,0)$ als Lösung ausgeschlossen haben, folgt aus den ersten beiden Gleichungen $x, y, \lambda \neq 0$ und es gilt

$$2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}.$$

Daraus folgt $x^2 = y^2$ und die Nebenbedingung liefert $x^2 = \frac{1}{2}$. Zusammen erhalten wir die Lösungen $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{3}{2} \to \text{Maximum} \\ h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \to \text{Minimum} \\ h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \to \text{Minimum} \\ h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{3}{2} \to \text{Maximum} \end{aligned}$$

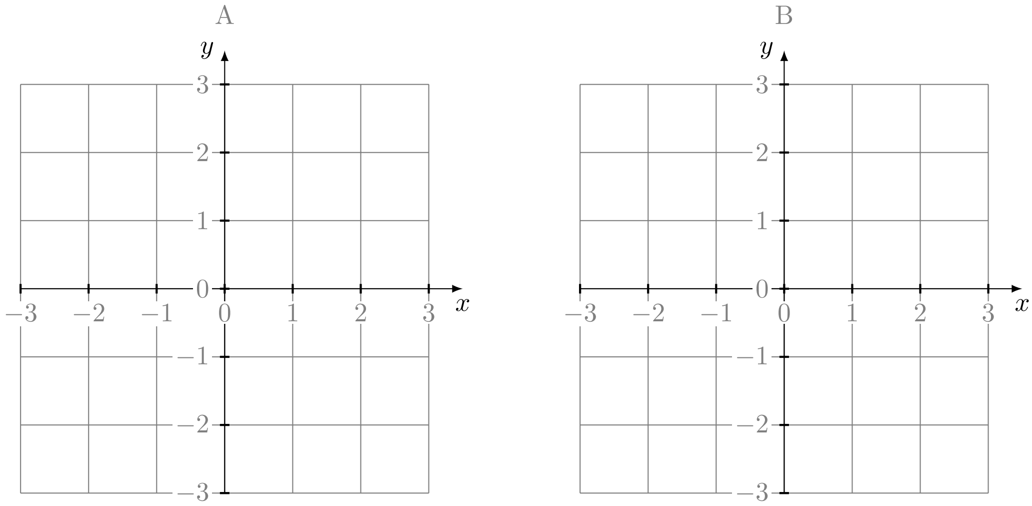
3. Aufgabe

10 Punkte

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge, die von der Parabel $y = -x^2 + 1$ und der Geraden $y = -(x+1)$ eingeschlossen wird. Weiterhin sei

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \leq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

(i) Skizzieren Sie die Mengen A und B jeweils in den unten gegebenen Koordinatenkreuzen.



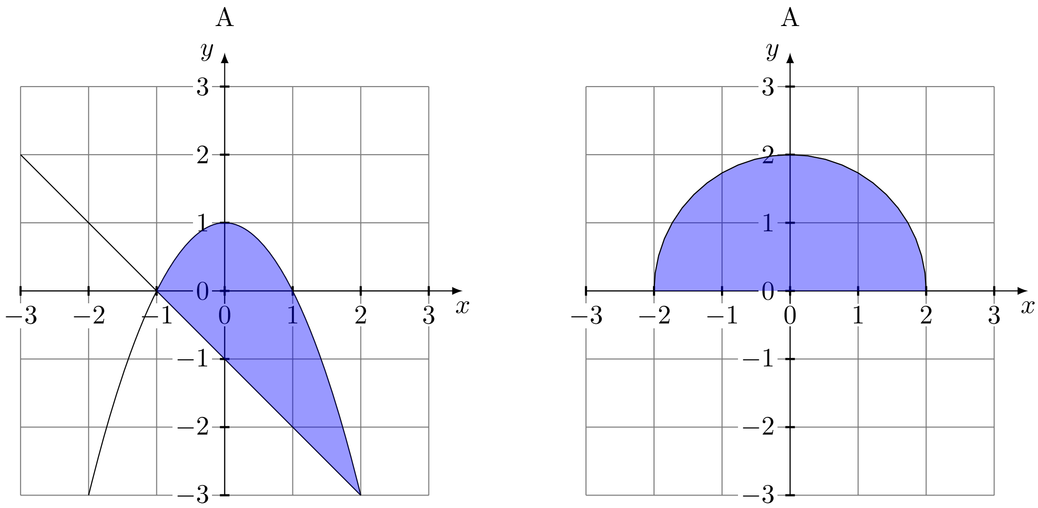
(ii) Berechnen Sie

$$\iint_A (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

sowie

$$\iint_B 4x^2 + 3\sqrt{x^2 + y^2} + 4y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(i) **(2+1 Punkte)**



(ii) **(3+4 Punkte)**

Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte der Parabel $y = -x^2 + 1$ und der Gerade $y = -(x + 1)$:

$$-x^2 + 1 = -(x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x + 1)(x - 2).$$

Die Schnittpunkte sind also $(-1, 0)$ und $(2, -3)$.

1. Lösungsmöglichkeit Da wir die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden kennen, setzen wir folgende Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned} -1 \leq & x \leq 2 \\ -(x+1) \leq & y \leq -x^2 + 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} &\iint_A (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{2} \int_{-(x+1)}^{-x^2+1} (-2x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} (-2x)(-x^2 + 1 + (x + 1))\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} (-2x)(-x^2 + x + 2)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} 2x^3 - 2x^2 - 4x\mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - 2 \cdot x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{1}{2}2^4 - \tfrac{2}{3}2^3 - 2 \cdot 2^2 - (\tfrac{1}{2}(-1)^4 - \tfrac{2}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}16 - \tfrac{2}{3}8 - 2 \cdot 4 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} - 2) \\ &= 8 - \tfrac{16}{3} - 8 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + 2 \\ &= -\tfrac{1}{8}3 + \tfrac{3}{2} \\ &= -\tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit Da wir die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden kennen, setzen wir folgende Integrationsgrenzen für zwei separate Integrationsbereiche:

$$\begin{aligned} 0 \leq & y \leq 1 \\ -\sqrt{-y+1} \leq & x \leq \sqrt{-y+1}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -3 \leq & y \leq 0 \\ -y - 1 \leq & x \leq \sqrt{-y+1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&\iint_A (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{-y+1}}^{\sqrt{-y+1}} (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-3}^0 \int_{-y-1}^{\sqrt{-y+1}} (-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d} \\
&= \int_0^1 \left[-x^2\right]_{-\sqrt{-y+1}}^{\sqrt{-y+1}} \mathrm{d}y + \int_{-3}^0 \left[-x^2\right]_{-y-1}^{\sqrt{-y+1}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 -(-y+1) + (-y+1)\mathrm{d}y + \int_{-3}^0 -(-y+1) + (-y+1)^2\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 0\mathrm{d}y + \int_{-3}^0 y^2 - y\mathrm{d}y \\
&= 0 + \left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2\right]_{-3}^0 \\
&= 0 - 0 - (\tfrac{1}{3}3^3 - \tfrac{1}{2}3^2) \\
&= -9 + \tfrac{9}{2} \\
&= -\tfrac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Wir errechnen nun das Integral über B.

Zunächst benutzen wir Polarkoordinaten und die Transformationsformel. Der Integrationsbereich B lässt sich in Polarkoordinaten mit folgenden Integrationsgrenzen beschreiben:

$$\begin{aligned}
0 \leq &\rho \leq 2 \\
0 \leq &\phi \leq \pi.
\end{aligned}$$

Für die Funktion im Integral ergibt sich dann mittels $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$4x^2 + 3\sqrt{x^2 + y^2} + 4y^2 = 4(x^2 + y^2) + 3\sqrt{x^2 + y^2} = 4\rho^2 + 3\rho.$$

Und mittels Transformationsformel bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\iint_B 4x^2 + 3\sqrt{x^2 + y^2} + 4y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi (4\rho^2 + 3\rho)\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi 4\rho^3 + 3\rho^2\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^2 \pi(4\rho^3 + 3\rho^2)\mathrm{d}\rho \\
&= \pi \int_0^2 4\rho^3 + 3\rho^2\mathrm{d}\rho \\
&= \pi \left[\rho^4 + \rho^3\right]_0^2 \\
&= \pi(2^4 + 2^3 - (0 + 0)) \\
&= 24\pi.
\end{aligned}$$

Alternative Rechnung mit vertauschter Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
&\iint_B 4x^2 + 3\sqrt{x^2+y^2} + 4y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \int_0^2 (4\rho^2 + 3\rho)\rho \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \int_0^2 4\rho^3 + 3\rho^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \left[\rho^4 + \rho^3\right]_0^2 \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi (2^4 + 2^3 - (0+0))\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi 24\mathrm{d}\phi \\
&= 24\pi.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Es seien $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1, -1 \le z \le 1\}$ und $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1, z = 1\}$. Weiterhin sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y+z \end{pmatrix},$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch D in Richtung der positiven z-Achse.

(ii) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch den Teil der Oberfläche von Z, der nicht in der Ebene $z = 1$ liegt.

(i) **(4 Punkte)** D ist der Deckel des Zylinders, also eine Kreisscheibe, und kann durch

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi}&\colon [0,1]\times[0,2\pi] \to D \\
\vec{\Phi}(\rho,\phi) &= \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

parametrisiert werden. Die partiellen Ableitungen nach den Parametern sind

$$\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\rho}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} -\rho\sin\phi \\ \rho\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit finden wir den Normalenvektor

$$\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\rho}(\rho,\phi) \times \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix},$$

welcher nach außen zeigt. Damit berechnet sich der Fluss zu

$$\begin{aligned}
\iint_D \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} \rho^3\cos\phi\sin^2\phi \\ \rho^3\cos^2\phi\sin\phi \\ \rho\sin\phi + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\phi + \rho \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= 0 + 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

(ii) **(5 Punkte)** Mit (i) und dem Satz von Gauß gilt

$$\begin{aligned}\iint_{\partial Z\setminus D} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \iint_{\partial Z} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} - \iint_{D} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O}\\ &= \iiint_Z \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi.\end{aligned}$$

Wir benutzen Zylinderkoordinaten für das Dreifachintegral. Dann wird Z beschrieben durch $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $-1 \le z \le 1$. Für das Volumenelement gilt $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\iiint_{\partial Z\setminus D} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\rho^2+1)\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z - \pi\\ &= 4\pi\int_0^1 \rho^3+\rho\ \mathrm{d}\rho - \pi\\ &= 4\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - \pi = 2\pi.\end{aligned}$$

Alternativ: Die Fläche $\partial Z \setminus D$ lässt sich zerlegen in

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1, -1\le z\le 1\},\\ B &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 1, z=-1\}.\end{aligned}$$

Wir parametrisieren M durch

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_1 &\colon [0,2\pi]\times[-1,1]\to M\\ \vec{\Phi}_1(\phi,z) &= \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen nach den Parametern sind

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_1}{\partial\phi}(\phi,z) = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\vec{\Phi}_1}{\partial z}(\phi,z) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

und damit finden wir den Normalenvektor

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_1}{\partial\phi}(\phi,z)\times\frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial\rho}(\phi,z) = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix},$$

welcher nach außen zeigt.

Wir parametrisieren B durch

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_2 &\colon [0,1]\times[0,2\pi]\to M\\ \vec{\Phi}_2(\rho,\phi) &= \begin{pmatrix}\rho\cos\phi\\ \rho\sin\phi\\ -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen nach den Parametern sind

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial\rho}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial\phi}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix}-\rho\sin\phi\\ \rho\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

und damit finden wir den Normalenvektor

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial\phi}(\rho,\phi)\times\frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial\rho}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix}0\\0\\\rho\end{pmatrix},$$

welcher nach innen zeigt. Damit berechnet sich der Fluss zu

$$\begin{aligned}
\iiint_{\partial Z \setminus D} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \iiint_M \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} + \iiint_B \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} \cos\phi \sin^2\phi \\ \cos^2\phi \sin\phi \\ \sin\phi + z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} \rho^3 \cos\phi \sin^2\phi \\ \rho^3 \cos^2\phi \sin\phi \\ \rho \sin\phi - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= 2 \int_0^{2\pi} 2\cos^2\phi \sin^2\phi \, \mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 -\rho^2 \sin\phi + \rho \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= 2 \left[\frac{1}{4}\phi + \frac{1}{16}\sin(4\phi) \right]_0^{2\pi} - 0 + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \\
&= \pi + \pi = 2\pi.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x\ln(y^2+1) + e^z,$$

eine partiell differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\vec{x}} \nabla(f) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

wobei $\vec{x} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve sei mit

$$\vec{x}(0) = -\vec{x}(\pi),$$
$$\vec{x}(\pi) = -\vec{x}(2\pi).$$

(ii) Es sei $\vec{\gamma}$ der Halbkreis in der Ebene $x = 0$ mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ von $(0,0,2)$ nach $(0,0,-2)$, welcher den Punkt $(0,2,0)$ enthält. Parametrisieren Sie $\vec{\gamma}$.

(iii) Es sei das folgende Vektorfeld gegeben

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x-y-z \\ 4y-x \\ 2z-x \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ die notwendige und hinreichende Potentialbedingung erfüllt, und bestimmen Sie anschließend alle Potentiale von $\vec{v}$.

(iv) Es seien $\vec{\gamma}$ wie in (ii) und $\vec{v}$ wie in (iii). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

(i) **(2 Punkte)** Es gilt dass

$$\vec{x}(0) = -\vec{x}(\pi) = -(-\vec{x}(2\pi)) = \vec{x}(2\pi).$$

Es handelt sich also um eine geschlossene Kurve.

Da $\nabla(f)$ ein Potentialfeld mit Potential $-f$ ist, ist das Integral über eine geschlossene Kurve 0.

Alternativ lässt sich auch rechnen

$$\int_{\vec{x}} \nabla(f) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = (-f(\vec{x}(0))) - (-f(\vec{x}(2\pi))) = -f(\vec{x}(0)) + f(\vec{x}(0))) = 0.$$

(ii) **(2 Punkte)** Wir parametrisieren $\vec{\gamma}$:

$$\vec{x} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alternative Parametrisierung:

$$\vec{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(t\pi) \\ 2\cos(t\pi) \end{pmatrix}.$$

(iii) **(4 Punkte)** Es gilt

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-(-1) \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist $\mathbb{R}^3$ als Definitionsbereich von $\vec{v}$ offen und konvex.
$\vec{v}$ besitzt also ein Potential.
1. Möglichkeit zur Potentialbestimmung: Für ein Potential u von $\vec{v}$ soll gelten

$$-\nabla(u) = \vec{v}.$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x + y + z, \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4y + x, \tag{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z + x. \tag{3}$$

Also zunächst gilt nach (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x + y + z.$$

Durch Integration ergibt sich

$$u(x,y,z) = \int -4x + y + z \mathrm{d}x + c_1(y,z) = -2x^2 + xy + xz + c_1(y,z).$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$-4y + x = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x^2 + xy + xz + c_1(y,z)) = x + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z).$$

Also

$$\frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -4y.$$

Und durch Integration

$$c_1(y,z) = \int -4y \mathrm{d}y + c_2(z) = -2y^2 + c_2(z).$$

Wir haben bisher nun

$$u(x,y,z) = -2x^2 + xy + xz - 2y^2 + c_2(z).$$

Einsetzen in (3) ergibt nun

$$-2z + x = \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial z}(-2x^2 + xy + xz - 2y^2 + c_2(z)) = x + \frac{\partial u}{\partial z} c_2(z).$$

Integration liefert

$$c_2(z) = \int -2z \mathrm{d}z + const = -z^2 + const.$$

Also ergeben sich alle Potentiale von $\vec{v}$ durch

$$u(x,y,z) = -2x^2 + xy + xz - 2y^2 + -z^2 + const.$$

2. Möglichkeit zur Potentialbestimmung: Für ein Potential u von $\vec{v}$ soll gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x + y + z, \tag{4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4y + x, \tag{5}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z + x. \tag{6}$$

Durch Integration erhalten wir

$$u(x,y,z) = \int -4x + y + z\mathrm{d}x + c_x(y,z) = -2x^2 + xy + xz + c_x(y,z), \tag{7}$$

$$u(x,y,z) = \int -4y + x\mathrm{d}y + c_y(x,z) = -2y^2 + xy + c_y(x,z), \tag{8}$$

$$u(x,y,z) = \int -2z + x\mathrm{d}z + c_z(x,y) = -z^2 + xz + c_z(x,y). \tag{9}$$

Daraus lässt sich das Potential ablesen:

$$u(x,y,z) = -2x^2 + xy + xz - 2y^2 + -z^2 + const.$$

(iv) **(2 Punkte) 1. Möglichkeit: Durch Verwenden des Potentials:**

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = u(\vec{x}(0)) - u(\vec{x}(1)) = u(0,0,2) - u(0,0,-2) = -2^2 - (-(-2)^2) = 0.$$

2. Möglichkeit: Durch Parametrisieren und Ausrechnen: Es ergibt sich für die Ableitung unserer Parametrisierung aus (ii):

$$\vec{x'}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich nun das Kurvenintegral ausrechnen.

$$\begin{aligned}
&\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{\pi} \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x'}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \vec{v}(0, 2\sin(t), 2\cos(t)) \cdot \vec{x'}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -2\sin(t) - 2\cos(t) \\ 8\sin(t) - 0 \\ 4\cos(t) - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{\pi} 16\sin(t)\cos(t) - 8\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} 8\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t \\
&= 8\left[-\frac{1}{2}\cos^2(t)\right]_0^{\pi} \\
&= 8(-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Möglichkeit: Alternative Rechnung durch andere Parametrisierung:
Es ergibt sich für die Ableitung:

$$\vec{x'}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi\cos(t\pi) \\ -2\pi\sin(t\pi) \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich nun das Kurvenintegral ausrechnen.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^1 \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \vec{v}(0, 2\sin(t\pi), 2\cos(t\pi)) \cdot \vec{x}'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2\sin(t\pi) - 2\cos(t\pi) \\ 8\sin(t\pi) - 0 \\ 4\cos(t\pi) - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi\cos(t\pi) \\ -2\pi\sin(t\pi) \end{pmatrix} \\
&= \pi \int_0^1 16\sin(t\pi)\cos(t\pi) - 8\sin(t\pi)\cos(t\pi)\mathrm{d}t \\
&= \pi \int_0^1 8\sin(t\pi)\cos(t\pi)\mathrm{d}t \\
&= 8\pi \left[-\frac{1}{2\pi}\cos^2(t\pi) \right]_0^1 \\
&= 8\pi \left(-\frac{1}{2\pi}\cos^2(\pi) - (-\frac{1}{2\pi}\cos^2(0)) \right) \\
&= 8\pi \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

---

6. Aufgabe

8 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(i) Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + 2y^2$, nimmt auf der Menge

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$$

weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum an.

(ii) Es sei

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Die stetige Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^2 + x$, nimmt ein globales Minimum und ein globales Maximum an und diese liegen auf dem Rand von B.

(iii) Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{c}$ die Einheitskreislinie um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$. Gilt $\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$, dann hat $\vec{v}$ ein Potential.

(iv) Die partielle Ableitung der Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{y^2}, & \text{falls } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

nach y im Punkt $(0,0)$ ist -1.

(i) ($\boxed{\mathbf{1}}$) Die Aussage ist falsch, da $x^2, y^2 \geq 0$ und daher wegen $h(x,y) \geq 0 = h(0,0)$ ein globales Minimum in $(0,0)$ angenommen wird.

(ii) **(3 Punkte)** Da f stetig und B kompakt ist, nimmt f globale Extrema auf B an. Es gilt $\nabla f(x,y) = (y^2+1, 2xy)^T \neq (0,0)^T$ und daher nimmt f keine lokalen Extrema auf B° an. Die globalen Extrema von f müssen daher in ∂B liegen. Die Aussage ist wahr.

(iii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch, siehe zum Beispiel $\vec{v} = \binom{y}{4xy^2}$. Es reicht nicht, dass das Kurventintegral über der Einheitskreislinie verschwindet. Es müssen alle Kurvenintegrale über beliebigen geschlossenen Kurven verschwinden, damit $\vec{v}$ ein Potential hat.

(iv) **(2 Punkte)** Nach der Definition der partiellen Ableitung ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(0,\Delta y) - g(0,0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y(0-\Delta y^2)}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1.\end{aligned}$$

Die Aussage ist wahr.