Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 16/17
F. Tröltzsch, A. Gündel-vom Hofe 10.03.2017

März – Klausur
Analysis II für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

Lösung unter Vorbehalt.

---

1. Aufgabe 12 Punkte

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0)$ und $\lim\limits_{y\to 0} g(0,y)$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Existieren eine oder beide partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

(d) Begründen Sie, dass g in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

(e) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(f) Existieren globale Extremwerte von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Wenn ja, geben Sie diese an.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0) = 1$

$\lim\limits_{y\to 0} g(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{4x^3y^2}{(x^4+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{-2x^4y}{(x^4+y^2)^2}$

(c) g ist in $(0,0)$ nicht stetig entlang der x–Achse in x–Richtung, daher auch nicht partiell differenzierbar nach x in $(0,0)$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial y}$ existiert also nicht.

Wir überprüfen, ob die partielle Ableitung nach y existiert: $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$. Die partielle Ableitung von g nach y existiert also in $(0,0)$.

(d) g ist nach (a) nicht stetig in $(0,0)$, also auch nicht total differenzierbar. Oder: Die partiellen Ableitungen existieren nicht beide in $(0,0)$, daher ist g dort auch nicht total differenzierbar.

(e) $\nabla g = (0,0)^T \Leftrightarrow x = 0,\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $y = 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) Wir schauen uns die Funktionswerte an den kritischen Stellen aus (d) an: $g(0,y) = 0,\ g(x,0) = 1$. Es ist $g \geq 0$ da in g nur gerade Potenzen von x und y vorkommen. Von oben können wir g gegen 1 abschätzen: $\dfrac{x^4}{x^4+y^2} \leq \dfrac{x^4+y^2}{x^4+y^2} = 1$. Also sind 0 und 1 globales Minimum bzw. Maximum von g.

2. Aufgabe

8 Punkte

Das Volumen eines Kegels von Höhe $y \geq 0$ und Radius $x \geq 0$ der kreisförmigen Grundfläche beträgt

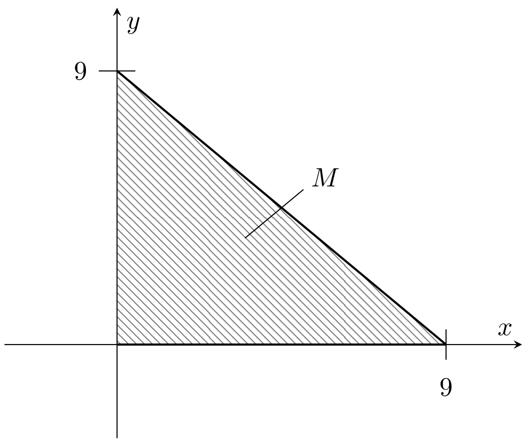
$$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 9\}$.

(b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es unter allen Kegeln mit $(x,y) \in M$ einen Kegel mit maximalem Volumen geben muss.

(c) Bestimmen Sie unter allen Kegeln, für die gilt: $y = 9 - x$, den Kegel mit dem größten Volumen.

(a)



(b) M ist eine abgeschlossene und beschränkte nicht-leere Menge, also kompakt. V ist eine stetige Funktion, nimmt daher auf M ihr Maximum und Minimum an.

(c) Wir wollen das Maximum der Funktion $V(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = y + x - 9 = 0$ bestimmen. Dies können wir sowohl durch Einsetzen der Nebenbedingung in V als auch mit Hilfe der Lagrange-Funktion realisieren.
1.Variante: Setze Nebenbedingung $y = 9 - x$ in V ein:

$$V(x, 9-x) = \frac{\pi}{3}(9x^2 - x^3) = \widetilde{V}(x),\ x \in [0,9].$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte von $\widetilde{V}(x)$: $\widetilde{V}'(x) = \pi(6x - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 6$. Die Randpunkte des Intervalls $[0,9]$ müssen ebenfalls auf Extrema untersucht werden. Für $x = 0$ und $x = 9$ erhalten wir $V(0,9) = V(9,0) = 0$, für $x = 6$ ergibt sich das Volumen $V(6,3) = 36\pi$. Der Kegel von Höhe 3 und Radius 6 hat also das größte Volumen.

2.Variante: Wir bestimmen Extrema von V unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 9$. Alle Kandidaten für Extrema erhalten wir als Lösung eines der beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(x,y)} V &= \lambda \operatorname{grad}_{(x,y)} g \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(regulärer Fall) bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(x,y)} g &= (0,0)^T \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(stationärer Fall)
oder an den Endpukten der zu untersuchenenden Strecke $(0, 9)$ bzw. $(9, 0)$.
Für (1) erhalten

$$\frac{2}{3}\pi xy = \lambda \tag{3}$$

$$\frac{1}{3}\pi x^2 = \lambda \tag{4}$$

$$x + y - 9 = 0 \tag{5}$$

und Gleichsetzen der linken Seiten von (3) und (4) liefert $2\pi xy = \pi x^2$, also $x = 0$ (und damit $V = 0$, also kein Maximum) oder $x = 2y$. Einsetzen von $x = 2y$ in (5) liefert

$$2y + y - 9 = 0,$$

also $y = 3$ und damit $x = 6$.
Gleichunggssytem (2) liefert keine Kandidaten da $\operatorname{grad}_{(x,y)} g = (1, 1)^T \neq (0, 0)^T$. Die Punkte $(0, 9)$ bzw. $(9, 0)$ sind keine Kandidaten für Maxima da dort $V(0, 9) = V(9, 0) = 0$ gilt. Wir erhalten also den größten Kegel für $x = 6, y = 3$.

3. Aufgabe

13 Punkte

(i) (a) Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Bild die drei Kurven $y = 1$, $y = -x$ und $y = x^3$. Markieren Sie die kompakte Menge M, die von allen drei Kurven berandet wird.

(b) Berechnen Sie $\iint_M x^2 y \, dxdy$, wobei M die kompakte Menge aus (a) ist.

(ii) Auf den Bildern sehen sie die Niveaulinien von drei verschiedenen Funktionen. Ordnen Sie jedem Bild die richtige Funktion zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

$$f(x,y) = x - y \qquad g(x,y) = x - y^2 \qquad h(x,y) = x^2 + y^2$$
$$k(x,y) = x^2 - y \qquad l(x,y) = \sin(x) + \cos(y) \qquad m(x,y) = x^2 - y^2$$

Hinweis: Fast immer lässt sich eine Vermutung durch Bestimmen der Niveaulinie zum Wert c=0 gut überprüfen.

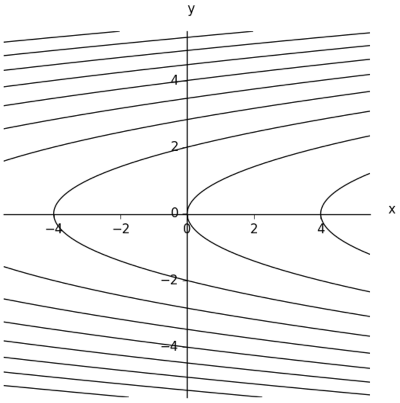


Abbildung 1

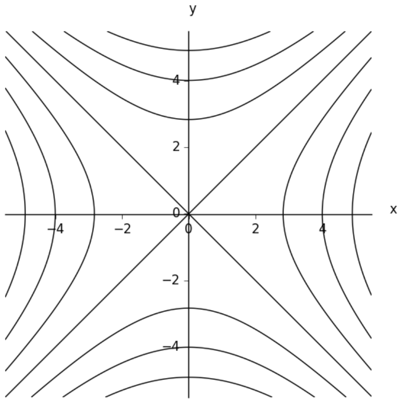


Abbildung 2

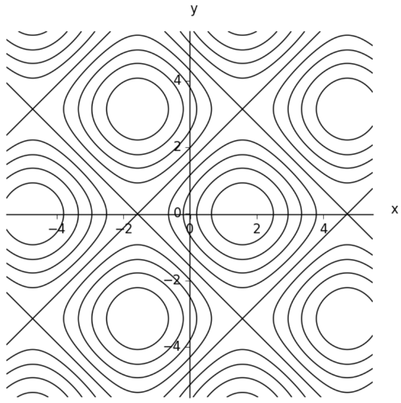
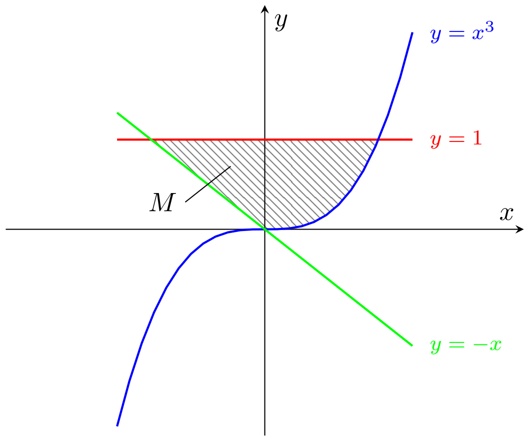


Abbildung 3

(i) (a)



(b) $\iint_M x^2 y dx dy = \int_0^1 \int_{-y}^{\sqrt[3]{y}} x^2 y dx dy = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-y}^{\sqrt[3]{y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{3}(y^2 + y^4) dy = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{8}{45}$

bzw. mit vertauschten Integralgrenzen

$$\begin{aligned}\iint_M x^2 y dx dy &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 x^2 y dy dx + \int_0^1 \int_{x^3}^1 x^2 y dy dx \\ &= \int_{-1}^0 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-x}^1 dx + \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^3}^1 dx = \frac{2}{30} + \frac{1}{9} = \frac{8}{45}\end{aligned}$$

(ii) Als Begründung für eine Funktion reicht es leider nicht, die Niveaumenge zu einem Wert hinzuschreiben. Abbildung 1 zeigt Niveaulininen der Funktion g. Die Niveaumenge zu einem Wert $c \in R$ ist

$$N_g(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + c\},$$

also eine "gedrehte" Parabel entlang der x–Achse.

Abbildung 2 zeigt Niveaulininen der Funktion m. Die Niveaumenge zum Wert 0 ist

$$N_m(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm y\},$$

also die Winkelhalbierenden der x– und y– Achse. Die anderen Funktionen können wir ausschließen. Die Funktion f hat als Niveaumenge zum Wert 0 nur die Winkelhalbierende zwischen poitiven bzw. negativen Achsen, und alle weiteren Niveaumengen sind entlang der y–Achse verschobene Winkelhalbierende. Die Funktion l können wir ebenfalls ausschließen da diese 2π–periodisch ist. Die Funktion m besitzt als Niveaumenge zu positivem c einen Kreis von Radius $\sqrt{c}$ um den Ursprung. Die Funktion k hat als Niveaumengen Parabeln entlang der y– Richtung.

Abbildung 3 zeigt die Funktion l. l kommt hier als einzige Funktion in Betracht da sie die einzige (2π–) periodische Funktion ist. Dies lässt sich auch nach dem Ausschlußprinzip folgern.

4. Aufgabe

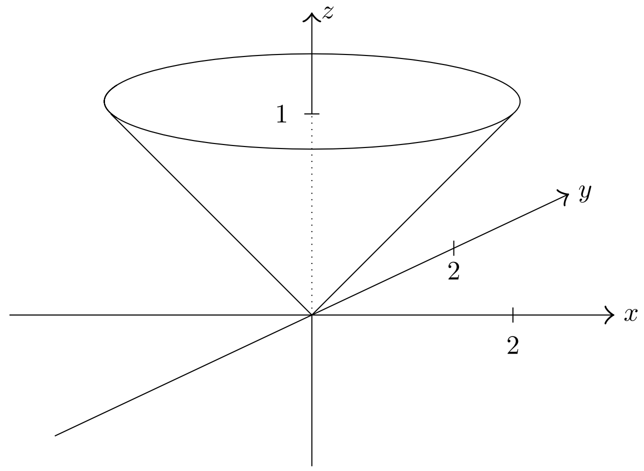
7 Punkte

Sei die Menge $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2z, z \in [0,1]\right\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie M.

(b) Berechnen Sie das Integral $\iiint_M x^2+y^2 dxdydz$ unter Verwendung geeigneter Koordinaten.

(a)



(b) Die Menge M ist ein Kegel mit Spitze im Ursprung, Höhe 1 und Radius 2 der kreisförmigen Grundfläche. Wir können ihn wie folgt in Zylinderkoordinaten beschreiben:

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) : r \in [0,2z], \phi \in [0,2\pi], z \in [0,1]\} \tag{6}$$

oder

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) : r \in [0,2], \phi \in [0,2\pi], z \in \left[\frac{r}{2},1\right]\}. \tag{7}$$

Für die erste Beschreibung berechnet sich das gesuchte Integral mit Hilfe der Transformationsregel für Zylinderkoordinaten ($dxdydz = rdrd\phi dz$) wie folgt:

$$\begin{aligned}\iiint_M x^2+y^2 dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2z} ((r\cos\phi)^2+(r\sin\phi)^2)\ r\ drdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2z} r^3 drdzd\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2z} dzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4z^4 dzd\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{5}z^5\right]_0^1 d\phi = \frac{8}{5}\pi\end{aligned}$$

Alternativ erhalten wir mit der zweiten Beschreibung von M für das Integral

$$\iiint_M x^2+y^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r}{2}}^1 ((r\cos\phi)^2+(r\sin\phi)^2)\ r\ dzdrd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r}{2}}^1 r^3 dzdrd\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,[z]_{\frac{r}{2}}^1\,drd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 - \frac{r^4}{2} drd\phi = \int_0^{2\pi} r^3 - \frac{r^4}{2} d\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{10}\right]_0^2 d\phi = 2\pi\left(4-\frac{16}{5}\right) = \frac{8}{5}\pi.$$

5. Aufgabe

12 Punkte

Seien

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = (1, z^2, 2yz)^T \quad \text{und}$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = x + yz^2$$

gegeben.

(i) Entscheiden Sie, ob die Ausdrücke (a)–(f) definiert sind. Wenn ja, bestimmen Sie diese. Wenn nein, geben Sie bitte eine kurze Begründung an, warum sie nicht definiert sind.
Hinweis: Das Symbol $\circ$ bezeichnet die Komposition, also Hintereinanderausführung, und das Symbol $\cdot$ das Skalarprodukt.

(a) $\vec{v} \cdot \operatorname{grad} g$ (b) $\operatorname{grad}(\vec{v}g)$ (c) $\vec{v} \circ \vec{v}$

(d) $\operatorname{div}(g - \vec{v})$ (e) $\operatorname{rot}(g \circ \vec{v})$ (f) $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{a}}(x,y,z)$ für $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}(x,y,z)}{|\vec{v}(x,y,z)|}$

(ii) Sei die Kurve γ gegeben durch die Parametrisierung $\vec{x}(t) = \left(t^3, t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \frac{\ln(1+t)}{\ln(2)}\right)^T$, $t \in [0,1]$. Bestimmen Sie den Wert des Arbeitsintegrals

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

(i) (a) $\operatorname{grad} g = (1, z^2, 2yz)^T$, $\vec{v} \cdot \operatorname{grad} g = \vec{v} \cdot \vec{v} = 1 + z^4 + 4y^2z^2$

(b) Der Gradient grad ist nur für skalare Funktionen definiert.

(c) $v \circ v = (1, 4y^2z^2, 4yz^3)^T$

(d) $g - \vec{v}$ ist nicht definiert da g eine skalare, $\vec{v}$ aber eine vektorielle Funktion ist.

(e) Der Rotationsoperator rot ist nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert, $g \circ \vec{v}$ ist aber eine skalare Funktion.

(f) Gemeint ist hier die Richtungableitung von g nach $\vec{a}$:
$\dfrac{\partial g}{\partial \vec{a}}(x,y,z) = \langle \operatorname{grad} g, \vec{a} \rangle = \left\langle \operatorname{grad} g, \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle = |\vec{v}|.$
Alternativ ist als Lösung auch die Begründung zulässig, dass wir die Ableitung einer skalaren Funktion nach einem Vektorfeld nicht definiert haben.

(ii) Im Aufgabenteil (i) haben wir bereits gesehen, dass $\vec{v}$ der Gradient von g ist, also $-g$ ein Potential für $\vec{v}$ ist. Wir bestimmen den Anfangs– und Endpunkt von γ :

$$g(\gamma(0)) = (0,0,0), \quad g(\gamma(1)) = (1,1,1)$$

Damit vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = -g(\gamma(0)) - (-g(\gamma(1))) = -g(0,0,0) + g(1,1,1) = -0 + 1 + 1 = 2.$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Es seien ein Paraboloid

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = z, 0 \leq z \leq 1\}$$

sowie die beiden Vektorfelder

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, 2(x + y))^T$$

und

$$\vec{w}(x, y, z) = (x - y^2, x^2 - y, 0)^T$$

gegeben.

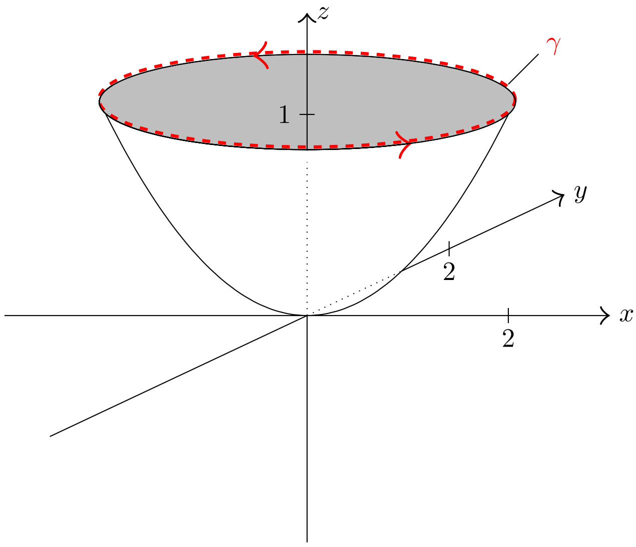
(a) Skizzieren Sie die Fläche P und markieren Sie die zugehörige Randkurve γ.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\iint_P \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_\gamma \vec{w} \cdot \vec{ds}.$$

(c) Berechnen Sie eines der beiden Integrale aus (b) und zeichnen Sie die die gewählte Orientierung von $d\vec{O}$ sowie von γ in Ihre Skizze ein.

(a) In der Skizze muss noch $d\vec{O}$ eingetragen werden.



(b) Nach dem Satz von Stokes gilt für ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$\iint_P \text{rot}\vec{w} \cdot d\vec{O} = \int_\gamma \vec{w} \cdot \vec{ds},$$

wobei P eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit mit stückweise glatter Randkurve γ ist und γ und $d\vec{O}$ so orientiert sind, dass sich die Oberfläche von P links von γ befindet. Wir bestimmen

$$\text{rot}\vec{w} = (0 - 0, 0 - 0, 2x - (-2y)) = \vec{v}.$$

Damit folgt die gewünschte Aussage.

(c) Wir stellen 3 alternative Lösungsansätze vor:

Variante 1, linke Seite: Wir parametrisieren P wie folgt:

$$\vec{x}(r,\phi) = \left(r\cos\phi, r\sin\phi, \frac{r^2}{4}\right)^T, \; r \in [0,2], \phi \in [0,2\pi]$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial} = \left(\cos\phi, \sin\phi, \frac{r}{2}\right)^T, \; \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0)^T$$

$$\text{und damit } d\vec{O} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} drd\phi = (-\frac{r^2}{2}\cos\phi, -\frac{r^2}{2}\sin\phi, r)^T drd\phi.$$

In das Integral eingesetzt erhalten wir

$$\iint_P \vec{v}\cdot d\vec{O} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \langle\vec{v}(\vec{x}(r,\phi)), (-\frac{r}{2}\cos\phi, -\frac{r}{2}\sin\phi, r)^T\rangle drd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2(r\cos\phi + r\sin\phi)rdrd\phi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r^2(\cos\phi + \sin\phi)rdrd\phi = 0$$

da sich aus Symmetriegründen das Integral von $\cos\phi$ bzw. $\sin\phi$ über dem Intervall $[0,2\pi]$ aufhebt.

Variante 2, linke Seite: Wir parametrisieren P wie folgt:

$$\vec{x}(\phi,z) = \left(2\sqrt{z}\cos\phi, 2\sqrt{z}\sin\phi, z\right)^T, \; z \in [0,1], \phi \in [0,2\pi].$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = \left(-2\sqrt{z}\sin\phi, 2\sqrt{z}\cos\phi, 0\right)^T, \; \frac{\partial\vec{x}}{\partial z} = \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\cos\phi, \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\phi, 1\right)^T$$

$$\text{und damit } d\vec{0} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial z} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} d\phi dz = (-2\sqrt{z}\cos\phi, -2\sqrt{z}\sin\phi, 2)^T d\phi dz.$$

In das Integral eingesetzt erhalten wir

$$\iint_P \vec{v}\cdot d\vec{O} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \langle\vec{v}(\vec{x}(\phi,z)), (-2\sqrt{z}\cos\phi, -2\sqrt{z}\sin\phi, 2)^T\rangle dzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4\sqrt{z}(\cos\phi+\sin\phi)dzd\phi = 0.$$

Variante 3, rechte Seite: Wir parametrisieren γ wie folgt:

$$\vec{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 1)^T, \; t \in [0,2\pi].$$

Es ist

$$\vec{c}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)^T$$

und

$$\vec{w}(\gamma(t)) = (2\cos t - 4\sin^2 t, 4\cos^2 t - 2\sin t, 0)^T.$$

Damit ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = \int_0^2 \pi\langle\vec{w}(\gamma(t)), \gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} 8(-\sin t\cos t+\cos^3 t+\sin^3 t)dt = \int_0^2 \pi 8(-\sin t\cos t)dt = [-\frac{8}{2}\sin^2 t]_0^{2\pi} = 0,$$

da sich das Integral von $\cos^3 t$ und $\sin^3 t$ (und allgemein ungerade Potenzen von $\cos t$ und $\sin t$) über dem Intervall $[0,2\pi]$ aus Symmetriegründen aufhebt.