Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 16/17

F. Tröltzsch, A. Gündel-vom Hofe 10.03.2017

März – Klausur
Analysis II B für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

Lösung unter Vorbehalt.

---

1. Aufgabe

12 Punkte

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0)$ und $\lim\limits_{y\to 0} g(0,y)$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Existieren eine oder beide partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

(d) Begründen Sie, dass g in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

(e) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(f) Existieren globale Extremwerte von g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Wenn ja, geben Sie diese an.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0) = 1$

$\lim\limits_{y\to 0} g(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{4x^3y^2}{(x^4+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{-2x^4y}{(x^4+y^2)^2}$

(c) g ist in $(0,0)$ nicht stetig entlang der x–Achse in x–Richtung, daher auch nicht partiell differenzierbar nach x in $(0,0)$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial y}$ existiert also nicht.

Wir überprüfen, ob die partielle Ableitung nach y existiert: $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$. Die partielle Ableitung von g nach y existiert also in $(0,0)$.

(d) g ist nach (a) nicht stetig in $(0,0)$, also auch nicht total differenzierbar. Oder: Die partiellen Ableitungen existieren nicht beide in $(0,0)$, daher ist g dort auch nicht total differenzierbar.

(e) $\nabla g = (0,0)^T \Leftrightarrow x = 0,\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $y = 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) Wir schauen uns die Funktionswerte an den kritischen Stellen aus (d) an: $g(0,y) = 0,\ g(x,0) = 1$. Es ist $g \geq 0$ da in g nur gerade Potenzen von x und y vorkommen. Von oben können wir g gegen 1 abschätzen: $\dfrac{x^4}{x^4+y^2} \leq \dfrac{x^4+y^2}{x^4+y^2} = 1$. Also sind 0 und 1 globales Minimum bzw. Maximum von g.

2. Aufgabe

8 Punkte

Das Volumen eines Kegels von Höhe $y \geq 0$ und Radius $x \geq 0$ der kreisförmigen Grundfläche beträgt

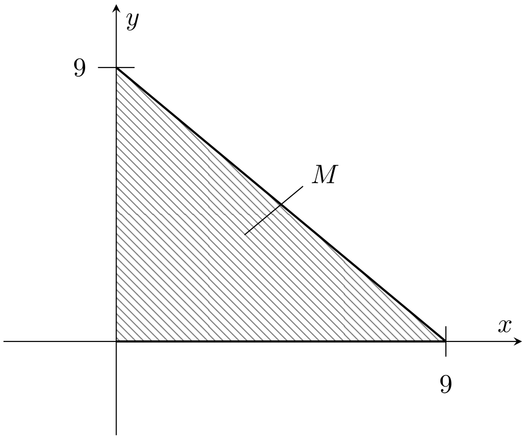
$$V(x, y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 9\}$.

(b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es unter allen Kegeln mit $(x, y) \in M$ einen Kegel mit maximalem Volumen geben muss.

(c) Bestimmen Sie unter allen Kegeln, für die gilt: $y = 9 - x$, den Kegel mit dem größten Volumen.

(a)



(b) M ist eine abgeschlossene und beschränkte nicht-leere Menge, also kompakt. V ist eine stetige Funktion, nimmt daher auf M ihr Maximum und Minimum an.

(c) Wir wollen das Maximum der Funktion $V(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = y + x - 9 = 0$ bestimmen. Dies können wir sowohl durch Einsetzen der Nebenbedingung in V als auch mit Hilfe der Lagrange-Funktion realisieren.
1.Variante: Setze Nebenbedingung $y = 9 - x$ in V ein:

$$V(x, 9 - x) = \frac{\pi}{3}(9x^2 - x^3) = \widetilde{V}(x),\ x \in [0, 9].$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte von $\widetilde{V}(x)$: $\widetilde{V}'(x) = \pi(6x - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 6$. Die Randpunkte des Intervalls $[0, 9]$ müssen ebenfalls auf Extrema untersucht werden. Für $x = 0$ und $x = 9$ erhalten wir $V(0, 9) = V(9, 0) = 0$, für $x = 6$ ergibt sich das Volumen $V(6, 3) = 36\pi$. Der Kegel von Höhe 3 und Radius 6 hat also das größte Volumen.

2.Variante: Wir bestimmen Extrema von V unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x + y - 9$. Alle Kandidaten für Extrema erhalten wir als Lösung eines der beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(x,y)} V &= \lambda \operatorname{grad}_{(x,y)} g \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(regulärer Fall) bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(x,y)} g &= (0, 0)^T \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(stationärer Fall)
oder an den Endpukten der zu untersuchenenden Strecke $(0,9)$ bzw. $(9,0)$.
Für (1) erhalten

$$\frac{2}{3}\pi xy = \lambda \tag{3}$$
$$\frac{1}{3}\pi x^2 = \lambda \tag{4}$$
$$x + y - 9 = 0 \tag{5}$$

und Gleichsetzen der linken Seiten von (3) und (4) liefert $2\pi xy = \pi x^2$, also $x = 0$ (und damit $V = 0$, also kein Maximum) oder $x = 2y$. Einsetzen von $x = 2y$ in (5) liefert

$$2y + y - 9 = 0,$$

also $y = 3$ und damit $x = 6$.
Gleichunggssytem (2) liefert keine Kandidaten da $\operatorname{grad}_{(x,y)} g = (1,1)^T \neq (0,0)^T$. Die Punkte $(0,9)$ bzw. $(9,0)$ sind keine Kandidaten für Maxima da dort $V(0,9) = V(9,0) = 0$ gilt. Wir erhalten also den größten Kegel für $x = 6, y = 3$.

3. Aufgabe

10 Punkte

(i) Sei die Funktion $f(x, y, z) = ze^{xy} + e^y - y$ gegeben. Wir betrachten die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass der Ursprung $\vec{x_0} = (0, 0, 0)$ in M liegt und dass in $\vec{x_0}$ der Vektor $\vec{v_0} = (0, 0, 1)$ senkrecht auf der Menge M steht.

(ii) Auf den Bildern sehen sie die Niveaulinien von drei verschiedenen Funktionen. Ordnen Sie jedem Bild die richtige Funktion zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

$$f(x, y) = x - y \qquad g(x, y) = x - y^2 \qquad h(x, y) = x^2 + y^2$$
$$k(x, y) = x^2 - y \qquad l(x, y) = \sin(x) + \cos(y) \qquad m(x, y) = x^2 - y^2$$

Hinweis: Fast immer lässt sich eine Vermutung durch Bestimmen der Niveaulinie zum Wert c=0 gut überprüfen.

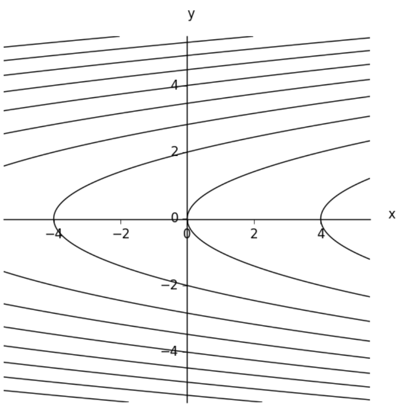


Abbildung 1

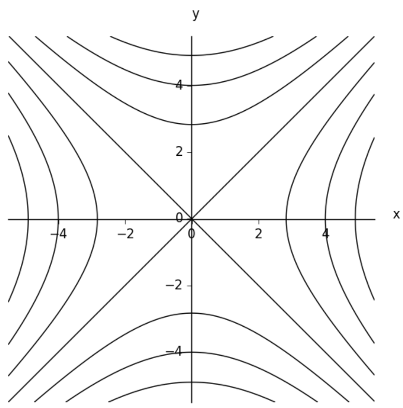


Abbildung 2

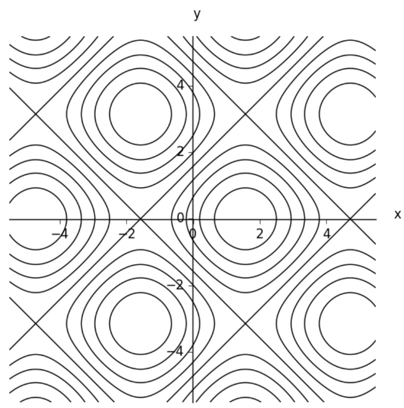


Abbildung 3

(i) $f(\vec{x_0}) = o + e^0 - 0 = 1$, also $\vec{x_0} \in M$. Der Gradient einer Funktion f in einem Punkt $\vec{x_0}$ steht immer senkrecht auf der Niveaumenge zum Wert $f(\vec{x_0})$ in $\vec{x_0}$. Daher üeberprüfen wir, ob $\vec{v_0}$ ein skalares Vielfaches des Gradienten von f in $\vec{x_0}$ ist. $\nabla f = (yze^{xy}, xze^{xy} + e^y - 1, e^{xy})^T$, also $\nabla f(\vec{x_0}) = (0, 0, 1)^T = \vec{v_0}$. Damit folgt die Behauptung.

(ii) Als Begründung für eine Funktion reicht es leider nicht, die Niveaumenge zu einem Wert hinzuschreiben. Abbildung 1 zeigt Niveaulininen der Funktion g. Die Niveaumenge zu einem Wert $c \in R$ ist

$$N_g(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + c\},$$

also eine "gedrehte" Parabel entlang der x–Achse.

Abbildung 2 zeigt Niveaulininen der Funktion m. Die Niveaumenge zum Wert 0 ist

$$N_m(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm y\},$$

also die Winkelhalbierenden der $x-$ und $y-$ Achse. Die anderen Funktionen können wir ausschließen. Die Funktion f hat als Niveaumenge zum Wert 0 nur die Winkelhalbierende zwischen poitiven bzw. negativen Achsen, und alle weiteren Niveaumengen sind entlang der y–Achse verschobene Winkelhalbierende. Die Funktion l können wir ebenfalls ausschließen da diese 2π–periodisch ist. Die Funktion m besitzt als Niveaumenge zu positivem c einen Kreis von Radius $\sqrt{c}$ um den Ursprung. Die Funktion k hat als Niveaumengen Parabeln entlang der $y-$ Richtung.

Abbildung 3 zeigt die Funktion l. l kommt hier als einzige Funktion in Betracht da sie die einzige (2π–) periodische Funktion ist. Dies lässt sich auch nach dem Ausschlußprinzip folgern.

4. Aufgabe

9 Punkte

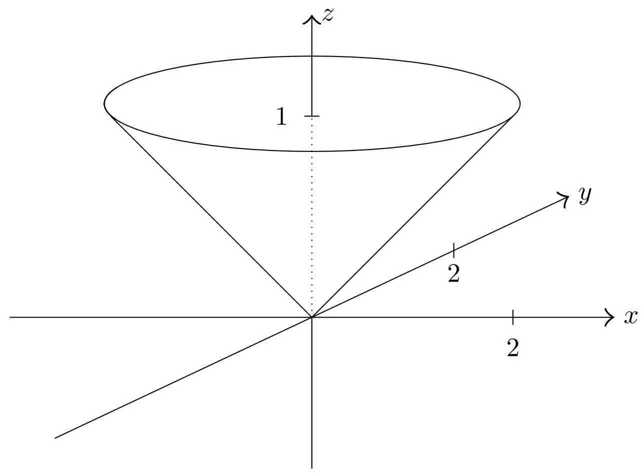
Sei die Menge $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2z, z \in [0, 1]\right\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie M.

(b) Beschreiben Sie den Rand ∂M von M in geeigneten Koordinaten.

(c) Berechnen Sie das Integral $\iiint_M x^2 + y^2 dxdydz$ unter Verwendung geeigneter Koordinaten.

(a)



(b) Der Rand von M besteht aus 2 Komponenten, dem Mantel und dem Deckel:

$$\partial M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, 2], \phi \in [0, 2\pi], z = \frac{r}{2}\}$$
$$\cup\{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, 2], \phi \in [0, 2\pi], z = 1\}$$

(c) Die Menge M ist ein Kegel mit Spitze im Ursprung, Höhe 1 und Radius 2 der kreisförmigen Grundfläche. Wir können ihn wie folgt in Zylinderkoordinaten beschreiben:

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) : r \in [0, 2z], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]\} \tag{6}$$

oder

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) : r \in [0, 2], \phi \in [0, 2\pi], z \in \left[\frac{r}{2}, 1\right]\}. \tag{7}$$

Für die erste Beschreibung berechnet sich das gesuchte Integral mit Hilfe der Transformationsregel für Zylinderkoordinaten ($dxdydz = rdrd\phi dz$) wie folgt:

$$\iiint_M x^2 + y^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2z} ((r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2)\ r\ drdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2z} r^3 drdzd\phi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2z} dzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4z^4 dzd\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{5}z^5\right]_0^1 d\phi = \frac{8}{5}\pi$$

Alternativ erhalten wir mit der zweiten Beschreibung von M für das Integral

$$\iiint_M x^2 + y^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r}{2}}^1 ((r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2)\ r\ dzdrd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r}{2}}^1 r^3 dzdrd\phi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\, [z]_{\frac{r}{2}}^1\, drd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 - \frac{r^4}{2} drd\phi = \int_0^{2\pi} r^3 - \frac{r^4}{2} d\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{10}\right]_0^2 d\phi = 2\pi\left(4 - \frac{16}{5}\right) = \frac{8}{5}\pi.$$

5. Aufgabe

12 Punkte

Seien

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = (1, z^2, 2yz)^T \quad \text{und}$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = x + yz^2$$

gegeben.

(i) Entscheiden Sie, ob die Ausdrücke (a)–(f) definiert sind. Wenn ja, bestimmen Sie diese. Wenn nein, geben Sie bitte eine kurze Begründung an, warum sie nicht definiert sind.
Hinweis: Das Symbol $\circ$ bezeichnet die Komposition, also Hintereinanderausführung, und das Symbol $\cdot$ das Skalarprodukt.

(a) $\vec{v} \cdot \operatorname{grad} g$ (b) $\operatorname{grad}(\vec{v}g)$ (c) $\vec{v} \circ \vec{v}$

(d) $\operatorname{div}(g - \vec{v})$ (e) $\operatorname{rot}(g \circ \vec{v})$ (f) $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{a}}(x,y,z)$ für $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}(x,y,z)}{|\vec{v}(x,y,z)|}$

(ii) Sei die Kurve γ gegeben durch die Parametrisierung $\vec{x}(t) = \left(t^3, t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \frac{\ln(1+t)}{\ln(2)}\right)^T$, $t \in [0,1]$. Bestimmen Sie den Wert des Arbeitsintegrals

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

(i) (a) $\operatorname{grad} g = (1, z^2, 2yz)^T$, $\vec{v} \cdot \operatorname{grad} g = \vec{v} \cdot \vec{v} = 1 + z^4 + 4y^2z^2$

(b) Der Gradient grad ist nur für skalare Funktionen definiert.

(c) $v \circ v = (1, 4y^2z^2, 4yz^3)^T$

(d) $g - \vec{v}$ ist nicht definiert da g eine skalare, $\vec{v}$ aber eine vektorielle Funktion ist.

(e) Der Rotationsoperator rot ist nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert, $g \circ \vec{v}$ ist aber eine skalare Funktion.

(f) Gemeint ist hier die Richtungableitung von g nach $\vec{a}$:
$\dfrac{\partial g}{\partial \vec{a}}(x,y,z) = \langle \operatorname{grad} g, \vec{a} \rangle = \left\langle \operatorname{grad} g, \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle = |\vec{v}|.$
Alternativ ist als Lösung auch die Begründung zulässig, dass wir die Ableitung einer skalaren Funktion nach einem Vektorfeld nicht definiert haben.

(ii) Im Aufgabenteil (i) haben wir bereits gesehen, dass $\vec{v}$ der Gradient von g ist, also $-g$ ein Potential für $\vec{v}$ ist. Wir bestimmen den Anfangs– und Endpunkt von γ :

$$g(\gamma(0)) = (0,0,0), \quad g(\gamma(1)) = (1,1,1)$$

Damit vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = -g(\gamma(0)) - (-g(\gamma(1))) = -g(0,0,0) + g(1,1,1) = -0 + 1 + 1 = 2.$$

6. Aufgabe

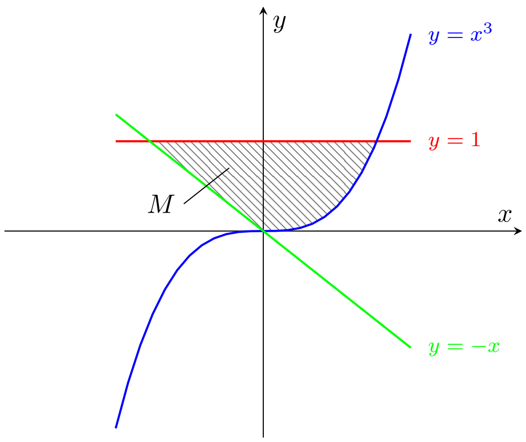
9 Punkte

(a) Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Bild die drei Kurven $y = 1$, $y = -x$ und $y = x^3$. Markieren Sie die kompakte Menge M, die von allen drei Kurven berandet wird.

(b) Berechnen Sie $\iint_M x^2 y \, dxdy$, wobei M die kompakte Menge aus (a) ist.

(c) Schreiben Sie das berechnete Integral aus (b) mit vertauschter Integrationsreihenfolge auf.

(a)



(b) $$\iint_M x^2 y dxdy = \int_0^1 \int_{-y}^{\sqrt[3]{y}} x^2 y dxdy = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-y}^{\sqrt[3]{y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{3}(y^2 + y^4) dy = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{8}{45}$$

bzw. mit vertauschten Integralgrenzen

$$\iint_M x^2 y dxdy = \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 x^2 y dydx + \int_0^1 \int_{x^3}^1 x^2 y dydx$$
$$= \int_{-1}^0 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-x}^1 dx + \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^3}^1 dx = \frac{2}{30} + \frac{1}{9} = \frac{8}{45}$$

(c) Siehe (b), gefragt ist der jeweils andere Integralausdruck (ohne Berechnung des Integrals).