# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** SS 17

**G. Penn-Karras, S. Yanchuk** 31.07.2017


## Juli – Klausur
## Analysis II für Ingenieurswissenschaften
## Lösungsskizze

## 1. Aufgabe

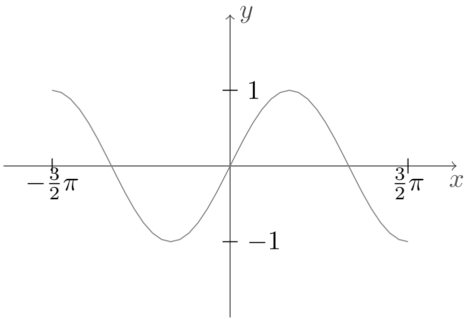
12 Punkte

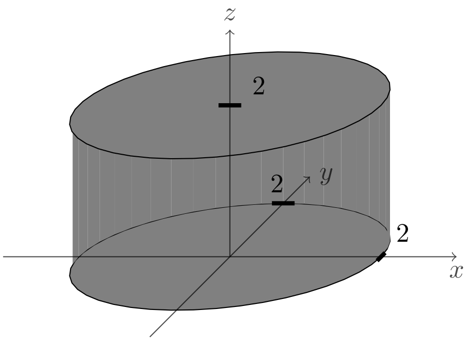
Skizzieren Sie die folgenden Mengen und geben Sie zu den topologischen Eigenschaften "beschränkt, offen, abgeschlossen, kompakt" jeweils an, ob die Menge die jeweilige Eigenschaft besitzt oder nicht (ohne Begründung).

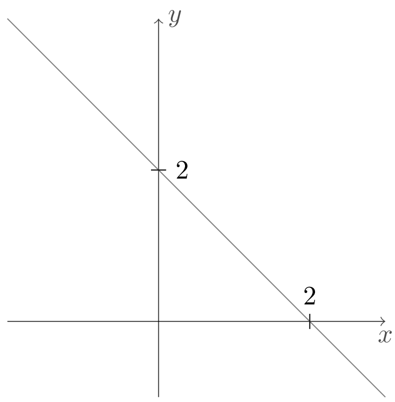
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) = y,\ x \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]\}$,

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z \in ]0,2[\}$,

c) $C$ sei die Niveaumenge von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = y + x$ zum Wert 2.




$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) = y,\ x \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]\}$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z \in ]0,2[\}$, Niveau von $x + y$ zum Wert 2

Die Menge $A$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit auch kompakt. Sie ist nicht offen.

Die Menge $B$ ist weder offen noch abgeschlossen. Sie ist beschränkt und nicht kompakt.

Die Menge $C$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt, folglich nicht kompakt. Sie ist nicht offen.

## 2. Aufgabe

8 Punkte

a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y^7}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

b) Ist $f$ partiell differenzierbar nach $x$ bzw. nach $y$ im Punkt $(0,0)$?

c) Ist $f$ differenzierbar in $(0,0)$?

a) Wir nähern uns zum Beispiel entlang der $x$-Achse mit $(x,0), x \to 0$ dem Punkt $(0,0)$. Dann ist

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty.$$

Das heißt, dass die Funktion unstetig im Punkt $(0,0)$ ist.

b) Wir untersuchen zunächst auf partielle Differenzierbarkeit in $x$-Richtung:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h^3}=\infty.$$

Somit können wir schließen, dass die Funktion in $(0,0)$ nicht nach $x$ partiell differenzierbar ist.

In $y$-Richtung gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^7}{h^3}=0.$$

Somit ist die Funktion in $y$-Richtung differenzierbar mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

c) Da die Funktion nicht einmal stetig im Ursprung ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

---

## 3. Aufgabe

10 Punkte

a) Berechnen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(x,y,z)=x^2+y^2+3yz+\frac{1}{6}z^3+z^2,$$

und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Extrema in diesen Punkten handelt.

b) Entscheiden Sie außerdem, ob die Funktion $f$ globale Extremwerte besitzt und geben Sie diese ggf. an.

---

a) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte. Es muss gelten

$$(\nabla f)(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y+3z\\3y+\frac{1}{2}z^2+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x=0$ und die zweite Gleichung liefert $y=-\frac{3}{2}z$. Dies in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt

$$-\frac{9}{2}z+\frac{1}{2}z^2+2z=-\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}z^2=0,$$

woraus $z=0$ oder $z=5$ folgt. Es ergeben sich also die beiden kritischen Punkte

$$(0,0,0)\text{ und }(0,-\frac{15}{2},5).$$

Nun zur Untersuchung der Extremwerteigenschaften mithilfe der Definitheit der Hessematrix. Es ist

$$f''(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&z+2\end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$f''(0,0,0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Hauptminoren 2,4 und -10 und ist somit indefinit. In $(0,0,0)$ liegt also kein Extremum vor. (Alternativ können die Eigenwerte bestimmt werden, diese sind 2,5,-1).

Für den zweiten kritischen Punkt gilt

$$f''\left(0,-\frac{15}{2},5\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&7\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Hauptminoren 2,4 und 10 und ist somit positiv definit. In dem Punkt liegt also ein lokales Minimum vor. (Alternativ sind die Eigenwerte 2, $\frac{9\pm\sqrt{61}}{2}$).

b) Da $f$ für $z \to \infty$ beliebig groß und für $z \to -\infty$ beliebig klein wird, hat $f$ keine globalen Extremwerte.

## 4. Aufgabe

8 Punkte

Es sei

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2z \\ 8y \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Funktion $v_3$, sodass $\vec{v}$ ein Potential besitzt.

b) Bestimmen Sie eine (andere) Funktion $v_3$, sodass $\vec{v}$ ein Vektorpotential besitzt.

Hinweis: Die Lösungen sollen also konkrete Funktionen $v_3(x,y,z)$ sein.

a) Damit das Vektorfeld ein Potential hat, muss die Ableitungsmatrix symmetrisch sein (äquivalent zu rot $\vec{v} = 0$). Es ist

$$\vec{v}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6xz & 0 & 3x^2 \\ 0 & 8 & 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Es müssen also die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial x}(x,y,z) &= 3x^2, \text{d.h. } v_3(x,y,z) = x^3 + c(y,z), \\ \frac{\partial v_3}{\partial y}(x,y,z) &= 0, \text{ woraus folgt } c(y,z) = c(z). \end{aligned}$$

Da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ der $\mathbb{R}^3$ und dieser offen und konvex ist, ist die obige notwendige Bedingung auch hinreichend für die Existenz eines Potentials.

Eine mögliche Wahl ist somit $v_3(x,y,z) = x^3$.

b) Der Definitionsbereich ist konvex, damit ist die notwendige Bedingung $\operatorname{div}(x,y,z) = 0$ auch hinreichend für ein Vektorpotential.

Somit muss gelten

$$\operatorname{div}(\vec{v}(x,y,z)) = 6xz + 8 + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z) = -6xz - 8 \quad \Rightarrow v_3(x,y,z) = -3xz^2 - 8z + c(x,y).$$

Eine mögliche Funktion ist also $v_3(x,y,z) = -3xz^2 - 8z$.

## 5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien die Kurve $\gamma$, die entlang des Graphen der Funktion $y = x^2$ von $(1,1)$ nach $(2,4)$ verläuft. Gegeben sei weiter das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}\times]0,\infty[ \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} \\ 2\sqrt{y} \end{pmatrix}.$$

a) Parametrisieren Sie die Kurve $\gamma$.

b) Besitzt $\vec{v}$ ein Potential? Wenn ja, berechnen Sie eins.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s}$.

---

a)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2].$$

b) Es ist

$$\vec{v}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{y} & -\frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist unsymmetrisch, somit hat $\vec{v}$ kein Potential.

c)

$$\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} = \int_1^2 \langle \vec{v}(t,t^2), \vec{x}'(t)\rangle\; dt = \int_1^2 \langle \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \rangle\; dt$$

$$= \int_1^2 6t^2\; dt = 2t^3\Big|_1^2 = 14.$$

---

## 6. Aufgabe

5 Punkte

Es sei

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\right\}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_A -y\; dxdy.$$

---

Es ist

$$A = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0,2], \varphi \in [\pi, 2\pi]\}.$$

Somit ist

$$\iint_A -ydxdy = \underbrace{\int_0^2 \int_\pi^{2\pi}}_{} (-r\sin\varphi) \underbrace{r}_{}\; d\varphi dr$$

$$= \int_0^2 r^2 \cos(\varphi)\Big|_{\varphi=\pi}^{2\pi} dr = \frac{2}{3}r^3\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

## 7. Aufgabe

10 Punkte

Es seien

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ z \in [-1,1]\}, \quad Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [-1,1]\},$$

sowie

$$f(x,y,z) = x + y + z^2, \qquad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z \\ 4x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Oberflächenintegrale

$$\iint\limits_F f\ dO, \quad \text{und} \quad \iint\limits_{\partial Z} \vec{v}\ d\vec{O}.$$

---

Es ist eine Parametrisierung von $F$ gegeben durch

$$\vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1].$$

Somit ist der Normalenvektor gegeben durch

$$\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial z}\right)(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$dO = \left| \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| d\varphi dz = 2 d\varphi dz.$$

Somit ist

$$\iint\limits_F f\ dO = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} (2\cos\varphi + 2\sin\varphi + z^2) \cdot 2\ d\varphi dz$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\pi 2 z^2 dz = 2\pi \left[\frac{2}{3} z^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\pi.$$

Für den zweiten Teil nutzen wir den Satz von Gauß. Es ist $(\mathrm{div}\vec{v})(x,y,z) = 1$ . Somit ist

$$\iint\limits_{\partial Z} \vec{v} d\vec{O} = \iiint\limits_Z 1\ dxdydz$$

$$= \mathrm{Vol}(Z) = 8\pi.$$

alternativ:

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} r\ dr d\varphi dh = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} 2\ d\varphi dh = 8\pi$$