Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 17/18
W. Stannat, A. Gündel-vom Hofe 23.02.2018

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

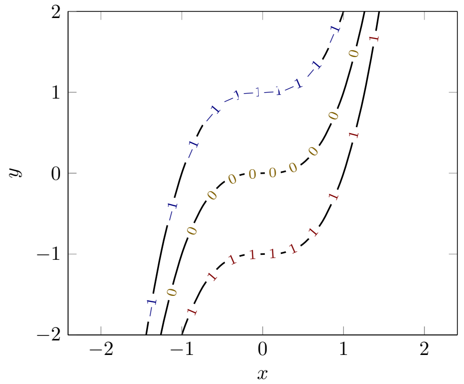
1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

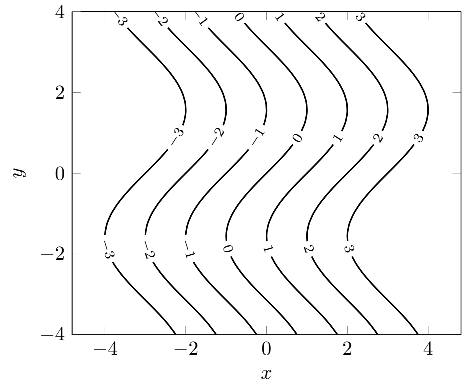
12 Punkte

(i) Ordnen Sie den Darstellungen von Niveaulinien

A



B



jeweils eine der folgenden Funktionen zu:

$$f_1(x, y) = y + \sin(x), \qquad f_2(x, y) = x^3 - y^3, \qquad f_3(x, y) = x - \sin(y), \qquad f_4(x, y) = x^3 - y.$$

(ii) Geben Sie Mengen $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{R}^2$ an, die Folgendes erfüllen (ohne Begründung) und skizzieren Sie die gewählten Mengen:

(a) M_1 ist weder offen noch abgeschlossen;

(b) M_2 ist unbeschränkt, offen und $M_2 \neq \mathbb{R}^2$;

(c) M_3 beschreibt die Punkte auf dem Graphen $f(x) = e^x$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{2x^3}{3} + \frac{xy^2}{2} - 8x + 4.$

(i) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob f an diesen Punkten ein lokales Extremum besitzt.

(ii) Besitzt f globale Extremwerte? Wenn ja, in welchen Punkten?

3. Aufgabe

12 Punkte

Sei γ die Strecke von $(1, 0, 0)^\top$ nach $(-1, -1, 1)^\top$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x + e^y \\ (1 + x)e^y \\ e^z \end{bmatrix}.$$

(i) Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{x}$ von γ an.

(ii) Untersuchen Sie, ob $\vec{v}$ ein Potential besitzt und berechnen Sie ggf. ein Potential.

(iii) Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

(iv) Geben Sie eine von γ verschiedene Kurve η an (Skizze oder Parametrisierung), so dass $\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_\eta \vec{v} \cdot \vec{ds}$. Begründen Sie, warum die von Ihnen gewählte Kurve diese Gleichheit erfüllt.

4. Aufgabe

12 Punkte

Sei $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ und $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 8yz \\ 2z^2 \end{bmatrix}$

(i) Skizzieren Sie H. Beschreiben Sie die Menge H in anderen als kartesischen Koordinaten.

(ii) Berechnen Sie $\iiint_H x + 12z \; dxdydz$.

(iii) Berechnen Sie das Flussintegral $\iint_{\partial H} \vec{v} \; d\vec{O}$. Geben Sie (mit Begründung) an, in welche Richtung das von Ihnen gewählte Oberflächenelement zeigt.

5. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ (x^2+y^2)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Weiter seien die Zylinderkoordinaten, wie üblich gegeben durch

$$\vec{x}(r,\varphi,h) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{bmatrix}, \quad r > 0,$$

(i) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h))$.

(ii) Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten.
Dazu sind die bekannten Formeln aus dem Skript gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und mit

$$\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h)) = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_h\vec{e}_h \text{ gilt } \operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_h}{\partial h} + \frac{1}{r}v_r.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

(b) Die auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$ eingeschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nimmt ein globales Maximum an.

(c) Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $g'(\vec{x}_0) = 0$ und $\det(g''(\vec{x}_0)) < 0$. Dann hat g in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.
Hinweis: Der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{R}^3$.

(ii) Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit Begründung) für

(a) ein nichtkonstantes Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das ein Vektorpotential besitzt.

(b) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die ein globales Maximum besitzt.