Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
W. Stannat, A. Gündel-vom Hofe

WS 17/18
23.02.2018

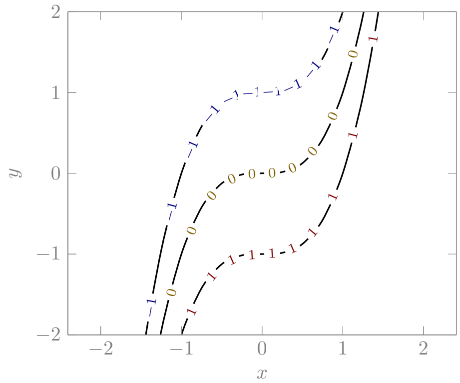
Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften
Lösungsskizze

1. Aufgabe

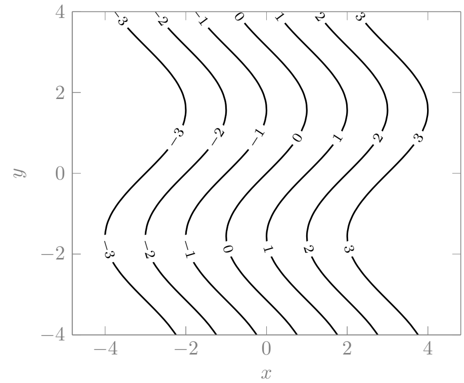
12 Punkte

(i) Ordnen Sie den Darstellungen von Niveaulinien

A



B



jeweils eine der folgenden Funktionen zu:

$$f_1(x,y) = y + \sin(x), \qquad f_2(x,y) = x^3 - y^3, \qquad f_3(x,y) = x - \sin(y), \qquad f_4(x,y) = x^3 - y.$$

(ii) Geben Sie Mengen $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{R}^2$ an, die Folgendes erfüllen (ohne Begründung) und skizzieren Sie die gewählten Mengen:

(a) M_1 ist weder offen noch abgeschlossen;

(b) M_2 ist unbeschränkt, offen und $M_2 \neq \mathbb{R}^2$;

(c) M_3 beschreibt die Punkte auf dem Graphen $f(x) = e^x$.

(i) A: f_4 , B:f_3

(ii) (a) z.B. $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) z.B. $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$

---

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{2x^3}{3} + \frac{xy^2}{2} - 8x + 4.$

(i) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob f an diesen Punkten ein lokales Extremum besitzt.

(ii) Besitzt f globale Extremwerte? Wenn ja, in welchen Punkten?

(i) Für die kritische Punkte muss gelten

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 8 \\ xy \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Aus $xy = 0$ folgt, dass entweder $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Untersuchen wir $x = 0$, so folgt aus Gleichung 1, dass $y = \pm 4$ gilt. Entsprechend folgt aus $y = 0$, dass $x = \pm 2$ gilt. Die kritischen Punkte sind also $(0,4)$,

$(0,-4)$, $(2,0)$, $(-2,0)$.
Nun untersuchen wir die Hessematrix auf Definitheit, es ist

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 4x & y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Einsetzen der kritischen Punkte liefert

$$f''(0,4) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f''(0,-4) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f''(2,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$f''(-2,0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wir erkennen, dass $\det f''(0,4) = \det f''(0,-4) = -16 < 0$ ist, d.h. es liegen ein positiver und ein negativer Eigenwert vor, die Matrix ist also indefinit und die beiden Punkte sind Sattelpunkte. Die Matrix $f''(2,0)$ ist diagonal, die Eigenwerte stehen also auf der Diagonalen und sind 8 und 2. Die Matrix ist also positiv definit und in dem Punkt liegt ein lokales Minimum. Analog folgert man für den Punkt $(-2,0)$, dass ein lokales Maximum vorliegt, da beide Eigenwerte negativ sind.

(ii) Dass f keine globalen Extremwerte besitzt, sieht man leicht, wenn man z.B. $y = 1$ setzt. Dann gilt

$$f(x,1) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x}{2} - 8 + 4.$$

Diese Funktion verhält sich wie x^3, d.h. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,1) = \pm\infty$. Die Funktionswerte werden also beliebig groß (d.h. kein Maximum) bzw. beliebig klein (also auch kein Minimum).

---

3. Aufgabe

12 Punkte

Sei γ die Strecke von $(1,0,0)^\top$ nach $(-1,-1,1)^\top$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^x + e^y \\ (1+x)e^y \\ e^z \end{bmatrix}.$$

(i) Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{x}$ von γ an.

(ii) Untersuchen Sie, ob $\vec{v}$ ein Potential besitzt und berechnen Sie ggf. ein Potential.

(iii) Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{ds}$.

(iv) Geben Sie eine von γ verschiedene Kurve η an (Skizze oder Parametrisierung), so dass $\int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{ds} = \int_\eta \vec{v}\cdot\vec{ds}$. Begründen Sie, warum die von Ihnen gewählte Kurve diese Gleichheit erfüllt.

(i) Eine Parametrisierung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1-2t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

(ii) Da der Definitionsbereich des Vektorfeldes konvex ist, genügt es zu berechnen, dass die Ableitungsmatrix von $\vec{v}$ symmetrisch ist . Es gilt

$$\vec{v}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^x & e^y & 0 \\ e^y & (1+x)e^y & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}.$$

Also hat $\vec{v}$ ein Potential u! Dieses berechnen wir im Folgenden, aus

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^x - e^y \\ -(1+x)e^y \\ -e^z \end{bmatrix}$$

folgt aus der ersten Gleichung durch Integration nach x

$$u(x,y,z) = -e^x - xe^y + c(y,z),$$

mit einer von y,z abhängigen Funktion $c(y,z)$, die noch näher zu bestimmen ist. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$-xe^y + \frac{\partial c}{\partial y} = -(1+x)e^y,$$

d.h. $\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = -e^y$ bzw. nach Integration bzgl. y, $c(y,z) = -e^y + d(z)$ mit einer zu bestimmenden Funktion $d(z)$.

Aus Gleichung 3 folgt schließlich

$$d'(z) = -e^z,$$

und folglich $d(z) = -e^z + c$, mit $c \in \mathbb{R}$. Ein Potential ist also

$$u(x,y,z) = -e^x - xe^y - e^y - e^z = -e^x - (1+x)e^y - e^z.$$

(iii) Mithilfe des Potentials lässt sich das Integral wie folgt berechnen:

$$\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} = u(1,0,0) - u(-1,-1,1) = -e - 1 - 1 - 1 - (-\frac{1}{e} - 0 - e) = -3 + \frac{1}{e}.$$

(iv) Da $\vec{x}$ Potential besitzt hängt das Integral nicht vom Weg sondern nur von den Endpunkten ab . Wir können zum Beispiel den Polyonzug durch die Punkte $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$ und $(-1,-1,1)$ wählen.

4. Aufgabe

12 Punkte

Sei $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ und $\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 8yz \\ 2z^2 \end{bmatrix}$

(i) Skizzieren Sie H. Beschreiben Sie die Menge H in anderen als kartesischen Koordinaten.

(ii) Berechnen Sie $\iiint_H x + 12z \; dxdydz$.

(iii) Berechnen Sie das Flussintegral $\iint_{\partial H} \vec{v}\; d\vec{O}$. Geben Sie (mit Begründung) an, in welche Richtung das von Ihnen gewählte Oberflächenelement zeigt.

(i) Die Skizze sollte eine Halbkugel vom Radius 2 oberhalb der $x - y - Ebene$ zeigen. Wir wählen Kugelkoordinaten zur Beschreibung:

$$\Phi \colon [0,2] \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \Phi(r,\varphi,\theta) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))^\top.$$

(ii) Wir verwenden die Parametrisierung aus (i) und berechnen mit der Transformationsformel (und der Determinante aus der Vorlesung $r^2 \sin(\theta)$):

$$\iiint_H 12z dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12r^3 \cos(\theta)\sin(\theta) d\varphi d\theta dr = 3 \cdot 2^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{2} = 48\pi$$
$$\iiint_H x dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta)\cos(\varphi) d\varphi d\theta dr = 0$$

(iii) Man sieht sofort div $\vec{v}(x,y,z) = x + 12z$. Mit dem Satz von Gauß folgt dann

$$\iint_{\partial H} \vec{v} d\vec{O} = \iiint_H x + 12z dx dy dz \overset{(ii)}{=} 48\pi.$$

Durch die Verwendung des Satzes von Gauß messen wir den Fluß aus dem Körper heraus oder anders ausgedrückt, das Oberflächenelement zeigt vom Körper weg.

---

5. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ (x^2+y^2)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Weiter seien die Zylinderkoordinaten, wie üblich gegeben durch

$$\vec{x}(r,\varphi,h) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{bmatrix}, \quad r > 0,$$

(i) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h))$.

(ii) Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten.
Dazu sind die bekannten Formeln aus dem Skript gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und mit

$$\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h)) = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_h\vec{e}_h \text{ gilt } \operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_h}{\partial h} + \frac{1}{r}v_r.$$

(i) Es gilt

$$\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h)) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \vec{e}_r + \vec{e}_h.$$

(ii) Daraus folgt, dass

$$\operatorname{div}(\vec{v}(\vec{x}(r,\varphi,h))) = \frac{\partial 1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial 1}{\partial h} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

(b) Die auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$ eingeschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nimmt ein globales Maximum an.

(c) Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $g'(\vec{x}_0) = 0$ und $\det(g''(\vec{x}_0)) < 0$. Dann hat g in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

Hinweis: Der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{R}^3$.

(ii) Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit Begründung) für

(a) ein nichtkonstantes Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das ein Vektorpotential besitzt.

(b) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die ein globales Maximum besitzt.

(i) (a) Diese Aussage stimmt. Es ist

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x^2| = 0,$$

und somit insgesamt also $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$, die Funktion ist also stetig in $(0,0)$.

(b) Die Aussage ist auch richtig. f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig, die Menge D ist kompakt, somit gilt der Satz vom Minimum und Maximum, der besagt, dass sowohl das globale Minimum als auch das Maximum angenommen werden.

(c) Die Aussage ist falsch. Es kann nun auch sein, dass alle Eigenwerte der Hessematrix negativ sind, dann gilt wie vorausgesetzt $\det(f''(\vec{x}_0)) < 0$, aber es liegt ein lokales Maximum und kein Sattelpunkt vor.

(ii) (a) Eine Möglichkeit ist, ein beliebiges Vektorfeld mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$, das in der x-Komponente von einer der anderen beiden Variablen abhängt (es sollte eine nichtlineare Abhängigkeit sein) und bilde die Rotation davon. Es sei zum Beispiel

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^{42} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\text{rot} u = \vec{v}$ ein Beispiel, wie in der Aufgabe verlangt, mit $\vec{v}(x,y,z) = [0\ 0\ -42y^{41}]$. Dieses hat dann offensichtlich ein Vektorpotential, nämlich $\vec{u}$.
Alternativ kann man ein Beispiel finden, indem man ein Vektorfeld sucht, dass die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Vektorpotentials erfüllt. Da der Definitionsbereich laut Voraussetzung konvex ist, genügt es zu zeigen, dass das gewählte Beispiel $\text{div}(\vec{v}) = 0$ erfüllt. Ein Beispiel dafür ist oben gegeben.

(b) Ein Beispiel ist die Funktion $f(x,y) = -x^2$. Offenbar gilt für diese Funktion $f(x,y) \leq 0$ für alle (x,y) und $f(x,y) = 0$ im Punkt $(0,0)$. Diese Funktion nimmt in dem angegebenen Punkt also ein globales Minimum an.