Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
A. Gündel-vom Hofe, W. Stannat

WiSe 18/19
01.03.2019

März – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) := xe^y \qquad\qquad \vec{g}(x,y) := \begin{pmatrix} \sin(3x) \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

(i) Begründen Sie, dass f und $\vec{g}$ überall differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen f' und $\vec{g}'$.

(ii) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitung von $f \circ \vec{g}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welches Format die jeweiligen Ableitungsmatrizen haben.

(iii) Berechnen Sie mithilfe der Produktregel $\frac{\partial(f\vec{g})}{\partial x}$ und $\frac{\partial(f\vec{g})}{\partial y}$.

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^3 + y^3 + 3xy$.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Hessematrix $\mathrm{Hess} f$ von f.

(ii) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f. Untersuchen Sie hierbei auch jeweils, ob es sich um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(iii) Nimmt f sein globales Minimum oder Maximum an? Begründen Sie kurz.

3. Aufgabe

13 Punkte

(i) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 3x^2 + cy^2 + \cos(x)e^z \\ -6xy \\ \sin(x)e^z \end{pmatrix}$$

mit Parameter $c \in \mathbb{R}$.

(a) Untersuchen Sie, für welche c das Vektorfeld $\vec{v}$ ein globales Potential besitzt.

(b) Untersuchen Sie, für welche c das Vektorfeld $\vec{v}$ ein globales Vektorpotential besitzt.

(ii) Wir setzen voraus, dass das Vektorfeld

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xy + yz \\ x^2 + 2yz + xz \\ y^2 + 2z + xy \end{pmatrix}$$

ein globales Potential besitzt.

(a) Bestimmen Sie dasjenige Potential u von $\vec{w}$, für welches $u(0,0,0) = 1$ gilt.

(b) Es sei γ die Verbindungsstrecke mit Anfangspunkt $(1,0,0)$ und Endpunkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot \vec{\mathrm{d}s}.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Menge $B = \{(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi), z) \in \mathbb{R}^3 : \rho \in [0,2], \phi \in [0,\pi], z \in [0,3]\}$.

(i) Beschreiben Sie die Menge B in kartesischen Koordinaten. **Hinweis:** Eine Skizze ist hilfreich.

(ii) Berechnen Sie das Integral $\iiint_B (x^2+y^2)z\,dV$.

(iii) Bestimmen Sie das Integral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}$ für das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xy^2z \\ 2x^2yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

unter Verwendung von Aufgabenteil (ii).

5. Aufgabe

10 Punkte

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 - 1 - y & , \text{ für } x > 0 \\ 0 & , \text{ für } x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie die Nullniveaumenge $N_f(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.

(ii) Berechnen Sie für $y_0 \in \mathbb{R}$ die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x,y_0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,y_0).$$

Was ergibt sich daraus für die Frage der Stetigkeit von f in den Punkten $(0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq -1$?

(iii) Zeigen Sie, dass

$$|f(x,y)| \leq x^2 + |1+y|$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Folgern Sie hieraus die Stetigkeit von f im Punkt $(0,-1)$.

6. Aufgabe

6 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(i) Die Menge $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, y = 0\}$ besitzt eine Parametrisierung der Form $\vec{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{x}(t)$.

(ii) Für die Menge $K := \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\}$ gilt: Jeder Punkt von K ist ein Randpunkt, d.h. es gilt $K \subset \partial K$.

(iii) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und nach unten beschränkt. Dann nimmt g sein Minimum an.