Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WiSe 18/19

A. Gündel-vom Hofe, W. Stannat 01.04.2019

März – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Bitte markieren Sie die Prüfung, die Sie laut Ihrer Studienordnung ablegen müssen:

☐ Prüfungsklausur (9 LP) ☐ Prüfungsklausur (8 LP) ☐ Prüfungsklausur (6 LP ohne HA)
☐ Übungsscheinklausur ☐ Weiß nicht

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}.$$

(i) Bestimmen Sie die Niveaumengen $N_f(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ von f zu den Werten $c = 1$, $c = 1/e$ und $c = 0$.

(ii) Berechnen Sie den Gradienten ∇f von f und die Hessematrix $\text{Hess}f$ von f.

(iii) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_{2,\vec{x}_0} f$ im Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (0,0)$.

2. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben sei die Menge $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

(i) Skizzieren Sie die Menge D und begründen Sie, dass $\partial D = D$.

(ii) Wir betrachten nun die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := (x-1)^2 + 2y$.

(a) Begründen Sie, dass f sein globales Maximum und Minimum annimmt.

(b) Finden Sie die globalen Extremstellen von f und klassifizieren Sie diese.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Fläche $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$, sowie die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 z \\ 2xy \\ 3zy \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 3z \\ x^2 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie S und kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Randkurve γ.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds}$. Lässt sich aus dem Ergebnis schließen, dass das Kurvenintegral von $\vec{v}$ wegunabhängig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Vektorpotential von $\vec{w}$ ist und berechnen Sie unter Zuhilfenahme dieser Tatsache das Flussintegral $\iint_S \vec{w} \cdot d\vec{O}$.

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei der halbe Hohlzylinder $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_H \frac{xz}{x^2+y^2} dV.$$

5. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k),$$

wobei $(\vec{x}_k)_{k\geq 1} := (1/k, 1/k^2)_{k\geq 1}$. Folgern Sie daraus, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

(ii) Zeigen Sie: f ist partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$. Sind die partiellen Ableitungen im Punkt $(0,0)$ stetig?

(iii) Zeigen Sie, dass für jeden Richtungsvektor $\vec{v} = (a,b)^T$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t}$$

existiert.

6. Aufgabe

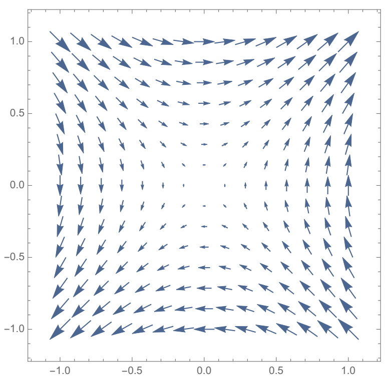
10 Punkte

(i) Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i \in \{1,2,3,4\}$,

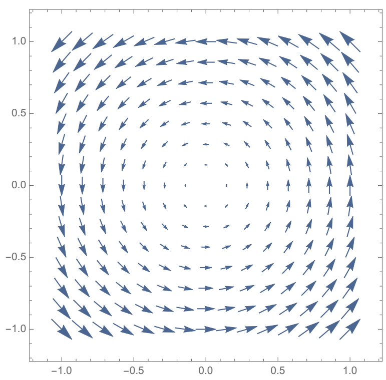
$$\vec{v}_1(x,y) = \left(-y,x\right)^T, \quad \vec{v}_2(x,y) = \left(y,x\right)^T, \quad \vec{v}_3(x,y) = \left(-x,-y\right)^T, \quad \vec{v}_4(x,y) = \left(x,-y\right)^T.$$

Ordnen Sie jeder der folgenden Grafiken genau eines der Vektorfelder $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_4$ zu.

A



B



(ii) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(a) Es sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen und konvex. Weiterhin sei $u : B \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und es gelte $\Delta u = 0$ mit dem Laplace-Operator Δ (u ist damit harmonisch). Dann besitzt der Gradient $\vec{v} = \nabla u$ ein Vektorpotential $\vec{w} : B \to \mathbb{R}^3$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Niveaumenge $N_f(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = 0\}$ kompakt.

(c) Für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)dxdy.$$