Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
C. Mehl, G. Penn-Karras

SoSe 19
26.07.2019

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

13 Punkte

Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \mathrm{e}^y(x^2+y^2)$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess}_{\vec{x}} f$ von f.

(ii) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f. Untersuchen Sie hierbei auch jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(iii) Es sei die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$ gegeben.

(a) Besitzt die Funktion f eingeschränkt auf die Menge K ein globales Minimum und ein globales Maximum? Begründen Sie kurz.

(b) Mit dem Lagrangeverfahren wurden für den Rand von K die Punkte $\vec{P}_1 = (0,3)$ und $\vec{P}_2 = (0,-3)$ bestimmt (dies muss nicht nachgerechnet werden). Geben Sie alle Stellen an, an denen f eingeschränkt auf die Menge K ein globales Extremum annimmt und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um das globale Minimum oder das globale Maximum handelt.

2. Aufgabe

9 Punkte

(i) Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Mengen konvex sind:

$$D_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\},$$
$$D_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 1\},$$
$$D_3 := \{(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$

(ii) Es seien das Skalarfeld v und das Vektorfeld $\vec{w}$ definiert durch

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto xz\cos(\pi z^2) + y\mathrm{e}^{-y}, \qquad \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \operatorname{grad}_{(x,y,z)} v.$$

(a) Geben Sie ein Potential u von $\vec{w}$ an, für das $u(0,0,0) = \pi$ gilt.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\vec{\gamma}_1} \langle \vec{w}, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ über die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t^2 & t^3 \end{pmatrix}^T.$$

(c) Wie ändern sich das Integral in (b), wenn statt über $\vec{\gamma}_1$ über die Kurve mit der folgenden Parametrisierung integriert wird:

$$\vec{\gamma}_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \vec{\gamma}_1(1-t^{2019}).$$

(d) Für ein stetiges Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gelte $\int_{\vec{\gamma}_1} f\,\mathrm{d}s = 42$. Welchen Wert nimmt das Integral $\int_{\vec{\gamma}_2} f\,\mathrm{d}s$ an.

3. Aufgabe

10 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge B. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung der Skizze.

(b) Geben Sie Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ an, sodass gilt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(c) Berechnen Sie $\iint\limits_B y\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ unter Verwendung einer geeingeten Integrationsreihenfolge.

(ii) Es sei der Quader $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ gegeben und ∂Q bezeichne den Rand von Q. Weiter sei

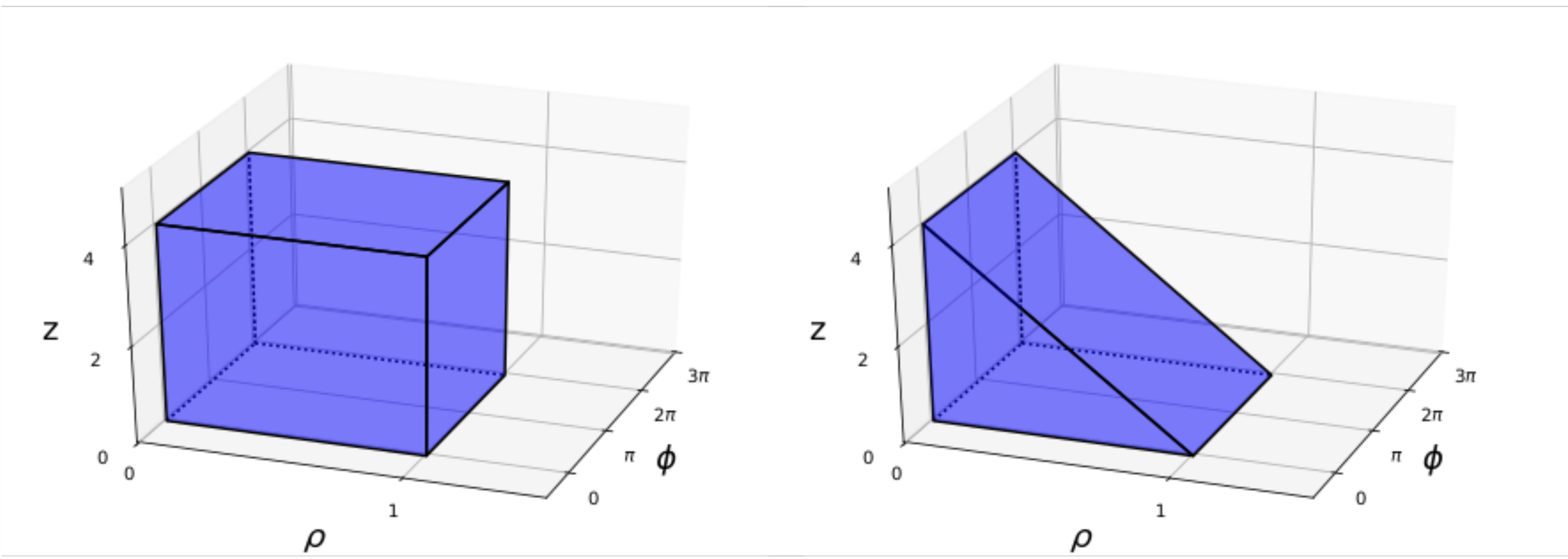
$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\iint\limits_{\partial Q} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{O}\rangle$.

4. Aufgabe

10 Punkte

(i) In den Abbildungen Z1 und Z2 sind Körper in <u>Zylinderkoordinaten</u> angegeben. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den den zugehörigen Körpern in <u>kartesischen Koordinaten</u> um Ellipsoide, Kegel, Kugeln, Pyramiden, Quader, Würfel oder Zylinder handelt.



Z1 Z2

(ii) Berechnen Sie

$$\iint\limits_A \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{wobei} \qquad A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge y\right\}.$$

5. Aufgabe

12 Punkte

(i) Es sei folgende Funktion gegeben:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{y^2}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0,\\ 1, & \text{falls } x = 0.\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ und $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{\sqrt{k}})$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

(c) Ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen.

(d) Ist f (total) differenzierbar in $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(ii) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2+y^2$. Zeigen Sie mit der Definition der Differenzierbarkeit, dass die Ableitung von g durch $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y\end{pmatrix}$ gegeben ist.

6. Aufgabe

6 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie für wahre Aussagen eine Begründung und für falsche ein konkretes <u>Gegenbeispiel</u> an.

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und ein Punkt $\vec{x}_0$ mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$ und $\det(\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} f) < 0$. Dann hat f in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nicht-offene Menge. Dann ist A abgeschlossen.

(iii) Sei $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Falls G eine offene und konvexe Menge ist, so besitzt $\vec{v}$ ein Potential.