Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
C. Mehl, G. Penn-Karras

SoSe 19
26.07.2019

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften
Lösungsskizze

1. Aufgabe

13 Punkte

Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \mathrm{e}^y(x^2+y^2)$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess}_{\vec{x}} f$ von f.

(ii) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f. Untersuchen Sie hierbei auch jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(iii) Es sei die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 9\}$ gegeben.

(a) Besitzt die Funktion f eingeschränkt auf die Menge K ein globales Minimum und ein globales Maximum? Begründen Sie kurz.

(b) Mit dem Lagrangeverfahren wurden für den Rand von K die Punkte $\vec{P}_1 = (0,3)$ und $\vec{P}_2 = (0,-3)$ bestimmt (dies muss nicht nachgerechnet werden). Geben Sie alle Stellen an, an denen f eingeschränkt auf die Menge K ein globales Extremum annimmt und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um das globale Minimum oder das globale Maximum handelt.

(i) **(2 Punkte)** Der Gradient und die Hessematrix sind gegeben durch

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \mathrm{e}^y \begin{pmatrix} 2x \\ 2y+x^2+y^2 \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{Hess}_{\vec{x}} f = \mathrm{e}^y \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 2x & 4y+x^2+y^2+2 \end{pmatrix}.$$

(ii) **(6 Punkte)** Die kritischen Punkte sind alle Punkte (x,y), für die gilt $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, also

$$\mathrm{e}^y \begin{pmatrix} 2x \\ 2y+x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}^y \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt aus der ersten Gleichung $\mathrm{e}^y 2x = 0$ direkt $x = 0$. Eingesetzen in die zweite Gleichung liefert $y^2+2y = 0$, also $y = -2$ oder $y = 0$. Damit folgen die kritischen Punkte $(x,y) = (0,-2)$ und $(x,y) = (0,0)$.
Setzen wir den Punkt $(x,y) = (0,0)$ in die Hessematrix ein, so erhalten wir

$$\operatorname{Hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch z.B. direktes Ablesen der Eigenwerte folgt, dass die Matrix positiv-definit ist und dass es sich somit um ein lokales Minimum handelt.
Setzen wir den Punkt $(x,y) = (0,-2)$ in die Hessematrix ein, so erhalten wir

$$\operatorname{Hess}_{(0,-2)} f = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Durch z.B. direktes Ablesen der Eigenwerte folgt, dass die Matrix indefinit ist und dass es sich somit um einen Sattelpunkt handelt.

(iii) **(2+3 Punkte)**

(a) Die Menge K ist kompakt und f ist als Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion. Damit nimmt f nach dem Satz über Minimum und Maximum auf K ein globales Maximum und ein globales Minimum an.

(b) Als kritische Punkte kommen alle kritischen Punkte im Inneren von K und die Punkte aus dem Lagrangeverfahren in Betracht. Für die kritischen Punkte stellen wir fest, dass das lokale Minimum bei $\vec{P}_3 = (0,0)$ den Funktionswert $f(0,0) = 0$ besitzt und $(0,0)$ offenbar in K liegt.

Weiter gilt $f(\vec{P}_1) = 9e^3 > f(\vec{P}_2) = 9e^{-3} > f(0,0) = 0$. Daher muss bei $(0,0)$ ein globales Minimum vorliegen und bei $\vec{P}_1$ ein globales Maximum.

---

2. Aufgabe

9 Punkte

(i) Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Mengen konvex sind:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}, \\ D_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 1\}, \\ D_3 &:= \{(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi\}. \end{aligned}$$

(ii) Es seien das Skalarfeld v und das Vektorfeld $\vec{w}$ definiert durch

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto xz\cos(\pi z^2) + y\mathrm{e}^{-y}, \qquad \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \operatorname{grad}_{(x,y,z)} v.$$

(a) Geben Sie ein Potential u von $\vec{w}$ an, für das $u(0,0,0) = \pi$ gilt.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\vec{\gamma}_1} \langle \vec{w}, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ über die Kurve mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t^2 & t^3 \end{pmatrix}^T.$$

(c) Wie ändern sich das Integral in (b), wenn statt über $\vec{\gamma}_1$ über die Kurve mit der folgenden Parametrisierung integriert wird:

$$\vec{\gamma}_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \vec{\gamma}_1(1 - t^{2019}).$$

(d) Für ein stetiges Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gelte $\int_{\vec{\gamma}_1} f\,\mathrm{d}s = 42$. Welchen Wert nimmt das Integral $\int_{\vec{\gamma}_2} f\,\mathrm{d}s$ an.

(i) **(3 Punkte)**

- D_1 ist konvex.
- D_2 ist nicht konvex.
- D_3 ist nicht konvex.

(ii) **(2+2+1+1 Punkte)**

(a) Aus der Aufgabenstellung erkennen wir direkt, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein Potential durch

$$u(x,y,z) = -v(x,y,z) + c$$

gegeben ist . Damit $\pi = u(0,0,0) = -v(0,0,0) + c = c$ gilt, müssen wir also $c = \pi$ wählen. Damit ist das gesuchte Potential

$$u(x,y,z) = -xz\cos(\pi z^2) - y\mathrm{e}^{-y} + \pi.$$

(b) Weil $\vec{w}$ ein Potential besitzt, sind die gesuchten Integrale wegunabhängig und können mit dem Potential bzw. der Stammfunktion berechnet werden. Es gilt daher

$$\int_{\vec{\gamma}_1} \langle \vec{w}, \mathrm{d}\vec{s}\rangle = v(\vec{\gamma}_1(1)) - v(\vec{\gamma}_1(0)) = v(1,1,1) - v(1,0,0) = \mathrm{e}^{-1} - 1 - 0 = \mathrm{e}^{-1} - 1.$$

(c) Da $\vec{\gamma}_2$ eine Paramatrisierung der Kurve von $\vec{\gamma}_1$ mit umgekehrter Durchlaufrichtung ist, folgt

$$\int_{\vec{\gamma}_2} \langle \vec{w}, \mathrm{d}\vec{s} \rangle = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

(d) Da beim skalaren Kurvenintegral die Durchlaufrichtung der Kurve keine Rolle spielt gilt

$$\int_{\vec{\gamma}_2} f \, \mathrm{d}s = 42.$$

---

3. Aufgabe

10 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge B. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung der Skizze.

(b) Geben Sie Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ an, sodass gilt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(c) Berechnen Sie $\iint\limits_B y \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ unter Verwendung einer geeingeten Integrationsreihenfolge.

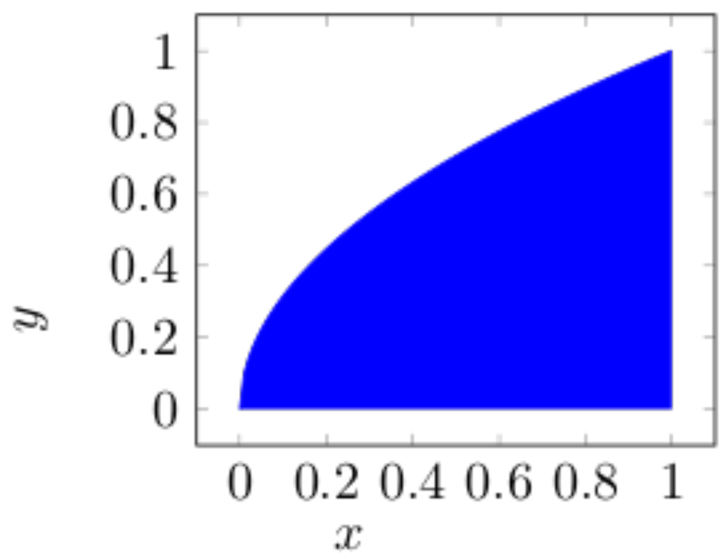
(ii) Es sei der Quader $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ gegeben und ∂Q bezeichne den Rand von Q. Weiter sei

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\iint\limits_{\partial Q} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{O} \rangle$.

(i) **(1+2+3 Punkte)**

(a) Eine Skizze für B sieht wie folgt aus:



(b) Es gilt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \ \leq y \leq \sqrt{x} \ \}.$$

(c) Da f stetig und B kompakt ist, können wir das Integral zurückführen auf Integrale über eine Integrationsvariable. Wir erhalen

$$\iint\limits_B f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \cos(x^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^1 2x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x.$$

Per Substitution erhalten wir

$$\frac{1}{4} \int_0^1 2x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^1 \cos(t) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} [\sin(t)]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4} \sin(1).$$

Es folgt $\iint\limits_B f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \sin(1)$.

(ii) **(4 Punkte)** Es gilt

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = y + z + x.$$

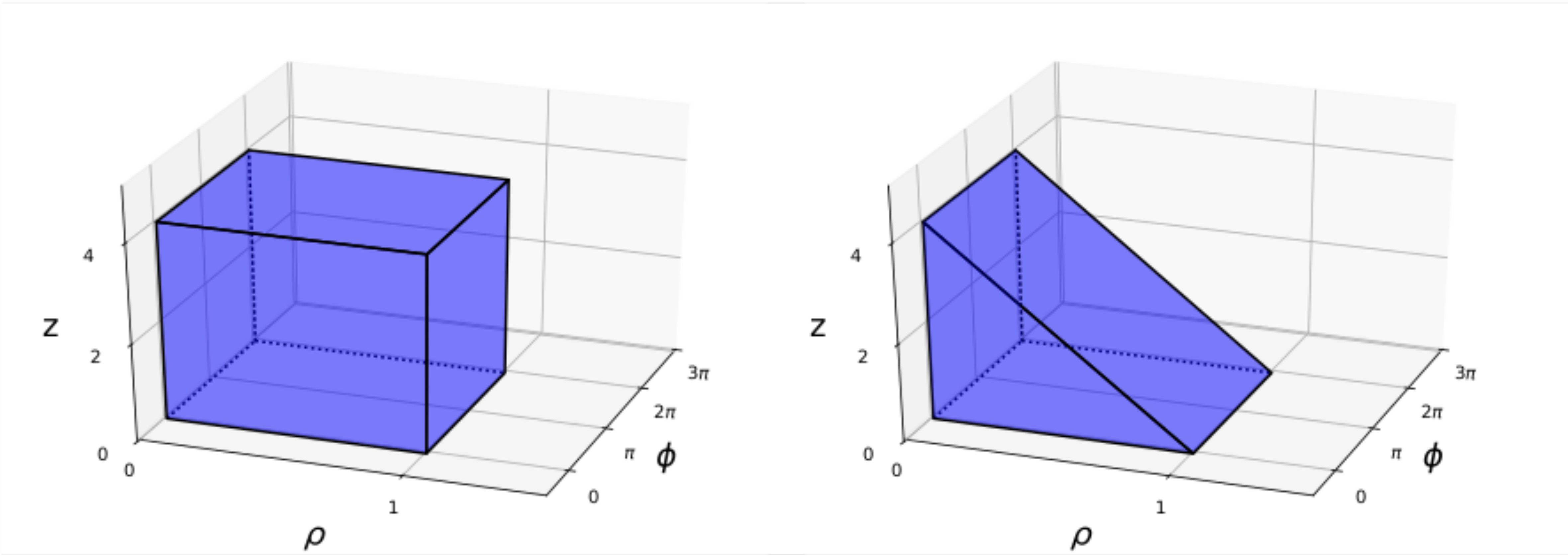
Nach dem Satz von Gauß und dem Satz von Fubini erhalten wir damit

$$\iint\limits_{\partial Q} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{O}\rangle = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3\int_0^2\int_0^1 x+y+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 18.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

(i) In den Abbildungen Z1 und Z2 sind Körper in Zylinderkoordinaten angegeben. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den den zugehörigen Körpern in kartesischen Koordinaten um Ellipsoide, Kegel, Kugeln, Pyramiden, Quader, Würfel oder Zylinder handelt.



Z1 Z2

(ii) Berechnen Sie

$$\iint\limits_A e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{wobei} \quad A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge y\right\}.$$

(i) **(2+2 Punkte)** Z1 ist ein Zylinder , Z2 ist ein Kegel.

(ii) **(6 Punkte)**

$$\iint\limits_A e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 e^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]_{\rho=1}^{\rho=2}\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^1)$$

5. Aufgabe

12 Punkte

(i) Es sei folgende Funktion gegeben:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{y^2}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0,\\ 1, & \text{falls } x = 0.\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ und $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{\sqrt{k}})$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

(c) Ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen.

(d) Ist f (total) differenzierbar in $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(ii) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$. Zeigen Sie mit der Definition der Differenzierbarkeit, dass die Ableitung von g durch $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(i) (a) **(2 Punkte)**
Für die Folge $\vec{x}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty} \exp(\tfrac{1}{k}) = \exp(0) = 1.$$

Im vorletzten Schritt wurde benutzt, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Für die Folge $\vec{y}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}})$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty} \exp(1) = \mathrm{e}.$$

(b) ($\boxed{\mathbf{1}}$) Die Funktion f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Dies kann man mit den Folgen der vorigen Teilaufgabe begründen:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{y}_k = (0,0) \quad \text{jedoch} \quad \lim_{k\to\infty} g(\vec{y}_k) = \mathrm{e} \neq 1 = g(0,0).$$

(c) **(4 Punkte)** Beide partiellen Ableitungen existieren in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(\frac{0}{h}) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

(d) ($\boxed{\mathbf{1}}$) Da die Funktion nicht stetig ist, ist sie auch nicht total differenzierbar ist.

(ii) **(4 Punkte)**

- *Nachprüfen der Differenzierbarkeit:*
Ziel ist es die Differenzierbarkeit von g mit Hilfe der Definition nachprüfen. D.h. es ist zu überprüfen, ob
$$\lim_{\Delta\vec{x}\to 0} \frac{\text{Fehler}}{\|\Delta\vec{x}\|} = 0$$
gilt, wobei $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y)^T$. Dafür muss zuerst der Fehler berechnet werden.
- *Berechnung des Fehlers:*
Da die Ableitung schon gegeben ist, kann der Fehler direkt mittels Formel berechnet werden:
$$\begin{aligned}\text{Fehler} &= g(x+\Delta x, y+\Delta y) - g(x,y) - g'(x,y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}\\ &= (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2 - 2x\Delta x - 2y\Delta y\\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.\end{aligned}$$
- *Berechnung des Grenzwertes:*
Wir rechnen nach:
$$\lim_{\Delta\vec{x}\to 0} \frac{\text{Fehler}}{\|\Delta\vec{x}\|} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0.$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie für wahre Aussagen eine Begründung und für falsche ein konkretes Gegenbeispiel an.

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und ein Punkt $\vec{x}_0$ mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$ und $\det(\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} f) < 0$. Dann hat f in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nicht-offene Menge. Dann ist A abgeschlossen.

(iii) Sei $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Falls G eine offene und konvexe Menge ist, so besitzt $\vec{v}$ ein Potential.

(i) **(2 Punkte)** Die Aussage ist wahr, denn $\vec{x}_0$ ist ein kritischer Punkt und das Produkt der Eigenwerte von $\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} g$ ist durch $\det(\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} g)$ gegeben. Damit hat $\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} g$ genau einen positiven und einen negativen Eigenwert. Es liegt in $\vec{x}_0$ also ein Sattelpunkt vor.

(ii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch. Mengen können sowohl nicht-offen als auch nicht abgeschlossen sein. Ein Beispiel ist die Menge
$$A = [0, 1) \times [0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(iii) **(2 Punkte)** Die Aussage ist falsch. Da G offen und konvex ist, besitzt $\vec{v}$ nur dann ein Potential, falls $\operatorname{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$. Ein Gegenbeispiel ist z.B.:
$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$
mit $\operatorname{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$.