Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WiSe 19/20

A. Gündel-vom Hofe, R. Schneider 17.02.2020

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieurwissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = xye^{-\frac{y^2}{2}}.$$

(i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

(ii) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen und klassifizieren Sie diese gegebenenfalls.

(iii) Untersuchen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(tx,ty)$ für festes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Folgt daraus die Beschränktheit der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$?

2. Aufgabe 9 Punkte

Betrachten Sie die Funktion f gegeben durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ (x^2 - y^2)\log x, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

(i) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumenge zum Niveau 0 der Funktion f.

(ii) Begründen Sie, warum die Funktion f im Bereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ stetig ist.

(iii) Überprüfen Sie, in welchen der Punkten $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, die Funktion f stetig ist.

(iv) Überprüfen Sie, welche Richtungsableitungen der Funktion f an der Stelle $(0,0)$ existieren.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\lim\limits_{u\searrow 0} u\log u = 0$ ist.

3. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}\colon G \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x,y,z) = (e^x - y, z^2 - x, 2yz + \cos z)^T$ und der Bereich

$$G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 3,\ -\pi \leq z \leq 2\pi\}.$$

(i) Berechnen Sie die Jacobimatrix $\vec{v}\,'$.

(ii) Besitzt $\vec{v}$ ein Potential? Besitzt $\vec{v}$ ein Vektorpotential?

(iii) Bestimmen Sie ein Potential u für $\vec{v}$, sofern eines existiert.

(iv) Die Kurve $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\vec{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\vec{\gamma}} \langle \vec{v}, \vec{ds}\rangle$.

4. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei der Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

(i) Skizzieren Sie den Bereich D und den Rand ∂D. Ist $\partial D \subset D$?

(ii) Ist D kompakt?

(iii) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_D \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

5. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie der Körper

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \le x^2+y^2 \le R^2, z \in [0,1]\},$$

wobei $0 < r < R$.

(i) Skizzieren Sie K und beschreiben Sie seinen Rand ∂K. Aus wie vielen glatten Teilflächen besteht ∂K?

(ii) Schreiben Sie $\vec{F}$ in Zylinderkoordinaten um. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

(iii) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, die parallel zur x-y-Ebene liegt. In welche Richtung zeigt das vektorielle Oberflächenelement $d\vec{O}$ auf S? Begründen Sie (z.B. anhand einer Skizze), dass das Flussintegral $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{O}\rangle = 0$ ist.

(iv) Sei S_r die Fläche $S_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2, z \in [0,1]\}$, und analog $S_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2, z \in [0,1]\}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gauß, dass

$$\iint_{S_r} \langle \vec{F}, d\vec{O}\rangle = \iint_{S_R} \langle \vec{F}, d\vec{O}\rangle.$$

(Dabei sei das Oberflächenelement $d\vec{O}$ auf den Flächen S_r und S_R gleichermaßen orientiert.)

6. Aufgabe

11 Punkte

Sei die Funktion f gegeben durch

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2^k}.$$

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die obige Reihe (absolut) konvergent?

(ii) Ist die Funktion f gerade oder ungerade (oder nichts von beidem)?

(iii) Ist die Funktion f periodisch? Wenn ja, geben Sie die minimale Periode $T > 0$ an.

(iv) Geben Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f an. Wie lauten die komplexen Fourierkoeffizienten von f?

(v) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x))^2\,dx$.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$ ist.