Dies ist ein Protokoll einer ISIS-Online-Klausur aus dem Wintersemester 21/22.

Aufgabe 1

Gegeben sei eine konvergente reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\left(\begin{pmatrix}(a_n-1)^2\\ a_n-2\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Menge $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leq 1\} \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\geq y\}$. Bestimmen Sie die Menge der inneren Punkte von M:

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2<1\} \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x<y\}$
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2<1\} \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>y\}$
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leq 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>y\}$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge $M = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 | \|\vec{x}\|<5\} \setminus \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 | \|\vec{x}\|\leq 2\}$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?

- Die Menge M ist offen und abgeschlossen.
- Die Menge M ist weder offen noch abgeschlossen.
- Die Menge M ist offen, aber nicht abgeschlossen.
- Die Menge M ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Menge $K = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 | \|\vec{x}\|<1\}$ und eine beliebige Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?

- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k = \vec{x}$ liegt in K.
- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k = \vec{x}$ erfüllt $\|x\|\leq 1$.

- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(\vec{y}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und der Grenzwert $\lim_{m\to\infty}\vec{y}_m = \vec{y}$ liegt in K.
- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(\vec{y}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und der Grenzwert $\lim_{m\to\infty}\vec{y}_m = \vec{y}$ erfüllt $\|y\| \leq 1$.

Aufgabe 5

Wir betrachten die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^4y^2\sin(\frac{2}{x^2}) \\ 4e^{2x} + 3\cos(x) \end{pmatrix}, \text{ für } x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie a und b so, dass $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

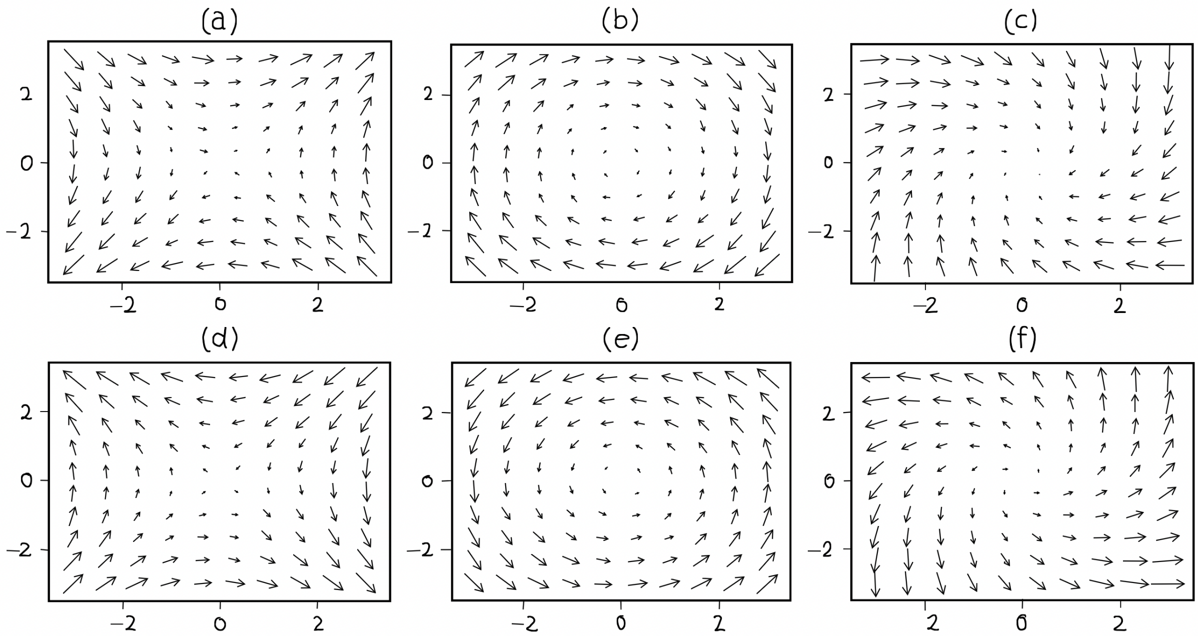
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - 2y^2)\cos\frac{1}{y}, & \text{für } y \neq 0 \\ 0, & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

Ist f im Punkt $(0,0)$ stetig?

- Ja, der Grenzwert existiert und ist gleich dem Funktionswert.
- Nein, der Grenzwert existiert nicht.
- Nein, der Grenzwert alterniert. Er existiert also, ist aber ungleich dem Funktionswert.

Aufgabe 7

Es sind folgende 6 Skizzen von Vektorfeldern gegeben und man soll zuordnen, welche davon das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ darstellt.



Aufgabe 8

Gegeben sei eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 - 3x \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie davon die Hesse-Matrix im Punkt $(3, 2)$.

Aufgabe 9

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := y^2(cos(\pi x) + xy^3)$.

Bestimmen Sie die Gleichung fuer die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, -1)$

Aufgabe 10

Seien $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Sei nun $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen ueber die Ableitungsmatrix von $\vec{f} \circ \vec{g}$ an der Stelle $\vec{x}$ ist im Allgemeinen wahr?

- $\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)' (\vec{x}) \in \mathbb{R}^{4,3}$
- $\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)' (\vec{x}) \in \mathbb{R}^{3,4}$
- $\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)' (\vec{x}) \in \mathbb{R}^{4,1}$
- $\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)' (\vec{x}) \in \mathbb{R}^{1,3}$

Aufgabe 11

Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein 3-mal differenzierbares Vektorfeld und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine 3-mal differenzierbare Funktion.

Untersuchen Sie den Ausdruck $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v})))$.

- Es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}))) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
- Die Abbildung $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f \cdot \operatorname{div}(\vec{v})))$ ist undefiniert.

Aufgabe 12

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x \in \,]1,5[\,, y \in \,]-2,3[\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Weiterhin sei $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(p)\right| \leq 1$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right| \leq 4$ fuer alle $p \in D$.

Bestimmen Sie mit dem Fehlerschrankensatz eine moeglichst kleine Fehlerschranke $c \in \mathbb{R}$, sodass $|f(2,-1) - f(4,1)| \leq c$ gilt.

Aufgabe 13

Sei K ein Kreiskegel mit Kegelspitze $(0,0,0)$, dessen Grundflaeche durch einen in der Ebene $y = -1$ befindlichen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(0,-1,0)$ gegeben ist. Welche Menge ist eine Beschreibung von K?

- $K = \left\{(r\cos\varphi, y, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 | \varphi \in [0,2\pi], y \in [-1,0], 0 \leq r \leq |4y|\right\}$
- $K = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 | \varphi \in [0,2\pi], z \in [-1,0], 0 \leq r \leq |4y|\right\}$

- $K = \{(r\cos\varphi, y, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 | \varphi \in [0, 2\pi], y \in [0, 1], r \in [0, 4]\}$

Aufgabe 14

Wir betrachten eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(-2,1) &= -4, \\ \operatorname{grad}_{(-2,1)} f &= \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Hess}_{(-2,1)} f &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das zugehoerige Taylorpolynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $(-2, 1)$ kann in der Form

$$a(x+2)^2 + 8(x+2) + b(y-1)^2 + 8(y-1) + c(x+2)(y-1) + d$$

dargestellt werden. Bestimmen Sie a, b, c und d.

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (-2x+3y)^3 + (y-4)^3.$$

Bestimmen Sie einen kritischen Punkt von f.

Aufgabe 16

Es sei $\vec{x_0}$ ein fester Punkt und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad}_{\vec{x_0}} f = \vec{0}$. Weiterhin besitze die Hessematrix $\operatorname{Hess}_{\vec{x_0}} f$ das charakteristische Polynom $\chi(z) = (z-2)(z+4)$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- Die Funktion f nimmt ein lokales Minimum in $\vec{x_0}$ an.
- Die Funktion f nimmt ein lokales Maximum in $\vec{x_0}$ an.
- Die Funktion f hat einen Sattelpunkt in $\vec{x_0}$.
- Keine der obigen Aussagen.

Aufgabe 17

Betrachten Sie Punkt $\vec{a} := (0,1,2) \in \mathbb{R}^3$ und Ebene $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\} \subset \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie den eindeutigen Punkt $\vec{b} \in E$, der von $\vec{a}$ den kleinsten Abstand hat. Bestimmen sie auch diesen Abstand zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Minimieren sie dazu die quadrierte euklidische Norm $\| \dots \|^2$ mithilfe des Lagrange-Verfahrens.

Aufgabe 18

Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xz + e^{x^2} \\ e^y + \cos(y) \\ 2x^2 + \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix},$$

wobei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z > 0\}$ sei.

Besitzt das Vektorfeld $\vec{F}$ ein Potential?

- Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat ein globales Potential auf D.
- Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D, da $\operatorname{rot} \vec{F} \neq 0$.
- Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat nicht unbedingt ein globales Potential auf D, da D nicht konvex ist.
- Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D, da $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$.

Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha x + 6xy \\ -2xy + \beta y^2 \\ 4z \end{pmatrix},$$

ein Vektorpotential besitzt.

Notwendig fuer die Existenz des Vektorpotentials ist:

- $\operatorname{div} \vec{v} = 0$
- $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$
- Der Definitionsbereich ist kompakt.
- Der Definitionsbereich ist konvex.

Aufgabe 20

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = xz - 2y.$$

Weiterhin seien eine Kurve $\vec{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{v}(x, y, z) = -\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f$ gegeben.

Berechnen Sie $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Aufgabe 21

Eine Parametrisierung der Flaeche F sei gegeben durch $\vec{x} : [1, 2] \times [1, 3] \to \mathbb{R}^3$,
$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v\ln(u) \end{pmatrix}$.

Die Richtung des zugehoerigen vektoriellen Oberflaechenelements ist $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u} \\ -\ln(u) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fuer das Vektorfeld $\vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2e^{\frac{z}{y}} \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix}$ wollen wir das Flussintegral ueber die Flaeche F berechnen. Der Ansatz zur Berechnung des Flussintegrals fuehrt auf das Integral

$$\int\int_F \vec{w}(x, y, z) \cdot d\vec{O} = \int_1^s \left(\int_1^t (au + bv) du \right) dv$$

fuer $a, b, s, t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b, $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 22

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -x - 2y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$ und die Kurve $\vec{\gamma}$ mit Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$. Der Ansatz zur Berechnung des vektoriellen Kurvenintegrals fuehrt auf das Integral $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (at^3 + bt^2 + ct)dt$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c.

Aufgabe 23

Die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ sei begrenzt durch die Kurven $3x = -y$ und $x^2 - y = 0$ fuer $0 \leq x \leq 1$. Berechnen Sie $\int\int_B 6\, dx\, dy$.

Aufgabe 24

Gegeben sei die Menge $B = \{(p\cos\varphi, p\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 | p \in [1,2], \varphi \in [0,\pi], z \in [0,1]\}$ und die Funktion $f : B \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = z^5(x^2+y^2)$.

Dann ist $\int\int_B\int f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_1^2\int_0^\pi p^j(\sin\varphi)^k(\cos\varphi)^\ell z^m d\varphi\, dp\, dz$ fuer $j,k,\ell,m \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie j,k,ℓ,m.

Welcher der folgenden Saetze wurde zur Umformung benutzt?

- Satz von Gauss
- Satz von Stokes
- Satz von Minimum und Maximum
- Transformationsformel

Aufgabe 25

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a und eine stetige Funktion $g(y)$, sodass $\int_5^8 \left(\int_9^{x+4} f(x,y)dy\right) dx = \int_9^a \left(\int_{g(y)}^8 f(x,y)dx\right) dy$ gilt.

Aufgabe 26

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}$.

Es sei S die obere Halbsphaere (d.h. $z \geq 0$) einer im Ursprung zentrierten Kugel vom Radius 2.

Die Randkurve von S sei durch $\vec{\gamma}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)^T$, $t \in [0,2\pi]$ parametrisiert.

Es gilt $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}(-2^a\sin^a(t) + 2^b\cos^b(t))dt$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a und b.

Andererseits gilt nach einem Satz der Vorlesung $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int\int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(x,y) \end{pmatrix} \cdot d\vec{O}$ mit

$h(x, y) = 2x^c - 3y^d$ fuer $c, d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie c und d.

Welcher der folgenden Saetze wurde zur Umformung benutzt?

- Satz von Stokes
- Satz von Minimum und Maximum
- Satz von Gauss
- Transformationsformel

Aufgabe 27

Gegeben sei die Menge $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\right\}$.

Der Rand ∂Q von Q besteht aus sechs glatten Flaechenstuecken. Diese seien so parametrisiert, dass die Normalen ueberall aus der Menge Q heraus nach aussen zeigen. Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 2y^2 \\ 4z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\int \int_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (ax + by + cz + d) dz\, dy\, dx$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a, b, c und d.

Welcher der folgenden Saetze wurde zur Umformung benutzt?

- Satz von Gauss
- Satz von Stokes
- Satz von Minimum und Maximum
- Transformationsformel