Analysis II - Klausurvorbereitung

Mehrdimensionale Differenzialrechnung Grundbegriffe

- Schnitt $A \cap B := \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{p} \in A \wedge \vec{p} \in B\}$
- Vereinigung $A \cup B := \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{p} \in A \vee \vec{p} \in B\}$
- Differenz $A \setminus B := \{\vec{p} \in A \mid \vec{p} \notin B\}$
- Komplement $A' := \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{p} \notin A\}$
- Innere Punkte existiert Kugel, die vollständig in A ist
- Randpunkte jede noch so kleine Kugel enthält Punkte von A und A'
- Offene Menge alle Punkte sind innere Punkte
- Abgeschlosse Menge alle äußeren Punkte haben Kugel, die vollständig außerhalb ist $\partial A \subseteq A$ $A = \bar{A}$
- Beschränkte Menge gibt Ursprungskugel ($r \neq \infty$), in der vollständig A ist
- Kompakte Menge abgeschlossen & beschränkt
- Komponentenweise Konvergenz alle Konvergentenfolgen konvergieren in $\mathbb{R}$
  $\Rightarrow \vec{a}_n$ konvergiert gegen $(\lim_{n\to\infty} a_{1n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n}, \dots \lim_{n\to\infty} a_{nm})$
- Abgeschlossene Menge $\Leftrightarrow$ $\forall$ konvergenten Folgen mit $\vec{a}_k \in A$ auch der Grenzwert in A liegt
- Niveaumenge Punkte mit bestimmten Funktionswert $N_c(f)$ für $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenz in $\vec{a}$ Alle ungleich, gegen $\vec{a}$ konvergierende Folgen haben den gleichen Grenzwert $\vec{b}$
  $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_k \in D \setminus \{\vec{a}\}$
  $$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \Leftrightarrow \forall \left(\vec{x}_k \in D \setminus \{a\}, \lim_{k\to\infty} (\vec{x}_k) = \vec{a}\right) : \lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = \vec{b}$$
- Stetigkeit im $\vec{a}$ auf den Punkt zulaufende Grenzwerte entsprechen den Punkt selbst $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$
- Komponentenweise Stetigkeit f ist stetig $\Leftrightarrow$ alle Komponentenfunktionen stetig sind
- Satz vom Minimum und Maximum Wenn D kompakt und f stetig auf D $\Rightarrow$ f hat auf D globales Maximum, Minimum
  Für $f: \mathbb{R}^n \subseteq D \to \mathbb{R}^1$
- Lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  $$\forall \left(\begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix} : \begin{matrix} \vec{f}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{f}(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \end{matrix} \right) \Rightarrow \text{linear, stetig}$$
- Ableitungmatrix $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$
  falls
  $$\vec{f}(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) + \underbrace{A \Delta \vec{x}}_{\text{Verschiebung auf Tangentialebene (für } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})} + \underbrace{\vec{R}(\vec{x}+\Delta\vec{x})}_{\text{„Höhenkorrektur" der Tangentialebene (für } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})}$$
  mit $\lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \frac{\vec{R}(\vec{x}+\Delta\vec{x})}{\|\Delta\vec{x}\|} = \vec{0} \Rightarrow$ diff'bar

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \qquad A = f'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2

- **Gradient in $\vec{x}$**
  $\mathbb{R}^n$ offen $\to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = f'(x,y,z)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

  ↳ Richtung des stärksten Aufstiegs $+\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$
  ↳ Richtung des stärksten Abfalls $-\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$
  ↳ senkrecht auf Niveaumenge $N_{f(\vec{z})}$ $\quad \operatorname{grad}_{\vec{x}} f$

- **Satz von Schwarz** alle 2. part. Ableitungen existieren & sind stetig $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

- **kritische Punkte** $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \vec{0}$ $\quad f: G \to \mathbb{R},\ x \in G$ $\quad$ notwendiges Kriterium

- **Zweite part. Ableitungen**
$$f''(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{u}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x z}(\vec{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z x}(\vec{u}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{u}) \end{bmatrix}$$

- **Hessematrix** $\operatorname{hess}_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\vec{x})\, u_i u_j$ $\quad u \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ Summe über 2. part. Ableitungen mal Koordinatenprodukt
  $f: G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig part. diff'bar,

- **Fehlerschrankensatz** $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^1$ diff'bar, G offen, $M_1, \ldots M_n \in \mathbb{R}$
  beschränkte Wachstumsraten liefern Fehlerschranken
  S Verbindungsstrecke $\vec{x}$ zu $\vec{y} \in G$
$$\forall (\vec{z} \in S: \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{z})\right| \leq M_i) \Rightarrow |f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \leq \sum_i M_i |y_i - x_i|$$

- **Fehler** von f: $|\Delta f| := |f(x_1 + \Delta x_1, \ldots x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots x_n)| \leq \sum M_i |\Delta x_i|$

- **Richtungsableitung** nach Einheitsvektor $\vec{v}$ $\quad |\vec{v}| = 1$ $\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) := \vec{f}'(\vec{x})\vec{v}$

- **partielle Ableitung** in Punkt $\vec{x_0}$ nach ∂x $\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x_0}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$

- **Taylorpolynom 1. Ordnung $T_1 f$** mit Entwicklungspunkt $\vec{x_0}$
$$T_1 f(x,y) = f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x_0}) \cdot ((x,y) - \vec{x_0})^T = f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x_0}) \cdot \begin{pmatrix} x - x(\vec{x_0}) \\ y - y(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

- **Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2 f$** mit Entwicklungspunkt $\vec{x_0}$
$$T_2 f(x,y) = T_1 f(x,y) + \frac{1}{2}((x,y) - \vec{x_0}) \cdot \operatorname{Hess} f(\vec{x_0}) \cdot ((x,y) - \vec{x_0})^T$$
$$= T_1 f(x,y) + \frac{1}{2}(x - x(\vec{x_0}), y - y(\vec{x_0})) \cdot \operatorname{Hess} f(\vec{x_0}) \cdot \begin{pmatrix} x - x(\vec{x_0}) \\ y - y(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

- **Richtungsableitung** von f an $\vec{x_0}$ in Richtung $\vec{v}$ $\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) := f'(\vec{x})\vec{v}$

Mehrdimensionale Differenzialrechnung – Rechenverfahren

Partielle Ableitungen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$

1) Prüfung Diff'barkeit — Komposition stetiger Funktionen mit vorhandenen part. Ableitungen, also diffbar in D offen

2) Ableitungsmatrix betrachte andere Argumente als konstant

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{x}) \\ \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{x})}_{\text{Richtungsableitung in } \vec{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

← x, y konstant

Rechenregeln Ableitungen $\lambda \in \mathbb{R}$ $h: \mathbb{R}^1$ offen $\to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n$ offen $\to \mathbb{R}^m$

Summen, Vielfache, Produkte und Kompositionen diff'barer Funktion ⇒ wieder diff'bar

$$\underbrace{(\vec{f}+\vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}', \quad (\lambda \vec{f})' = \lambda \vec{f}'}_{\text{Linearität}}, \quad \underbrace{\frac{\partial(h \cdot \vec{g})}{\partial x_j} = \frac{\partial h}{\partial x_j} \cdot \vec{g} + h \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}}_{\text{Skalarmultiplikation}}, \quad \underbrace{\frac{\partial \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle}{\partial x_j} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{Skalarprodukt}}, \quad \underbrace{\frac{\partial(\vec{f} \times \vec{g})}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}}_{\text{nur } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3}$$

$$\underbrace{(\vec{f} \circ \vec{g})'}_{\in \mathbb{R}^{p,n}} = \underbrace{\vec{f}'(\vec{g})}_{\in \mathbb{R}^{p,m}} \cdot \underbrace{\vec{g}'}_{\in \mathbb{R}^{m,n}} \quad f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \text{ diff'bar}$$

Rechenregeln Gradient

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}}(f \cdot g) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} f \cdot g + f \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} g, \qquad \operatorname{grad}_{\vec{x}}(f \circ g) = f'(g \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} g)$$

Lokale Extrema $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G$ offen $\to \mathbb{R}^1$, $x \in G$

1) kritische Punkte $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = 0$, f zweimal stetig part. diff'bar

2a) für $n=2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = 0$

i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$ ⇒ Sattelpunkt

ii $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ ⇒ lokales Minimum

iii $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ ⇒ lokales Maximum

iv $\det(\operatorname{hess}_{\vec{x}} f) = 0$ ⇒ keine Auskunft

2b) für n allgemein

$$\operatorname{hess}_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) u_i u_j$$

i $\forall \vec{u} \neq \vec{0}: \operatorname{hess}_{\vec{x}} f(\vec{u}) > 0$ ⇒ positiv definit, f in $\vec{x}$ striktes lokales Minimum
ii $\forall \vec{u} \neq \vec{0}: \operatorname{hess}_{\vec{x}} f(\vec{u}) < 0$ ⇒ negativ definit, f in $\vec{x}$ striktes lokales Maximum
iii Wechselt $\operatorname{hess}_{\vec{x}} f(\vec{u})$ VZ ⇒ infinit, f in $\vec{x}$ Sattelpunkt
iv $\forall \vec{u} \neq \vec{0}: \operatorname{hess} \geq 0 \vee \operatorname{hess} \leq 0$ ⇒ positiv/negativ semifinit, keine Auskunft

Lokale Extrema mit Nebenbedingungen $f: \mathbb{R}^n \supseteq G$ offen $\to \mathbb{R}$

1) kritische Punkte

Lagrange-Methode $\begin{pmatrix} \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}} g, \\ g(\vec{x}) = 0 \end{pmatrix}$ oder singulärer Fall $\begin{pmatrix} \operatorname{grad}_{\vec{x}} g = \vec{0}, \\ g(\vec{x}) = 0 \end{pmatrix}$

2) Hilfsfunktion $h(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) - \lambda g(x)$, $\operatorname{grad} h = 0$

3) Berechnung: Extrema ohne Nebenbedingung von $\operatorname{grad} h = 0$ bestimmen

Singulärer Fall: —"— (g-Niveau ist keine glatte Fläche/Kurve) muss mit anderen Methoden untersucht werden

4

Partielle Ableitung in einem Punkt

1) $f(\vec{x_0})$ evtl. gegeben
2) $f(x_0+h, y_0, z_0)$ aus x-Richtung annähern
3) $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(\vec{x_0})}{h}$ Limes gegen $\vec{x_0}$ laufen lassen

Taylorpolynom 2. Ordnung in kritischem Punkt

1) $f(\vec{x_0})$ evtl. gegeben
2) $\mathrm{Hess}f(\vec{x_0})$ einsetzen!
3) $((x,y) - \vec{x_0})$
4) einsetzen $T_2 f(x,y) = f(\vec{x_0}) + \frac{1}{2}((x,y)-\vec{x_0}) \cdot \mathrm{Hess}f(\vec{x_0}) \cdot ((x,y)-\vec{x_0})^T$

Analysis II - Klausurvorbereitung

Vektoranalysis-Grundbegriffe

- **Skalarfeld** $u: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^1$
- **Vektorfeld** $\vec{v}: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$
- **Gradient** von u — Ableitung eines Vektorfelds $\nabla u = \operatorname{grad} u$
  für r euklidisch: $\operatorname{grad} r = \frac{\vec{x}}{r}$ $\quad \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{r^3}$ $\quad \operatorname{grad} \frac{-1}{r^2} = \frac{2\vec{x}}{r^4}$
- **Divergenz** von $\vec{v}$ — Quelldichte in $\vec{x}$ über alle Einheitsrichtungen
  $\operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x})$ — Volumenverzerrung einer stationären Strömung
  $\boxed{\vec{v}: \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} \text{ ist quellfrei, divergenzfrei}}$
- **Rotation** von $\vec{v}$

$$\nabla \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

  Rotationanteil der Ableitung
  $\boxed{\vec{v}: \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \text{ ist wirbelfrei; im } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{v}' \text{ symmetrisch}}$
- **Potential** u für wirbelfreis $\vec{v}$ — Stammfunktion eines wirbelfreien Vektorfeldes
  $u: \operatorname{grad} u = -\vec{v} \Rightarrow u$ ist Potential
  $\frac{\partial u}{\partial x} = v_1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_2 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = v_3$
  $\boxed{\vec{v} \text{ hat Potential } (\vec{v} = -\operatorname{grad} u) \Rightarrow \vec{v} \text{ ist Potentialfeld, konservatives Feld}}$
- **Vektorpotential** für $\vec{v}$ $\quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$
- **Kurvenlänge** $\quad L = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$
- **konvexe** Teilmenge G — Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte liegt ganz in G
- **Kurvenintegral** von $\vec{F}$ über die Kurve $\vec{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$
  $\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \, dt$ $\quad \vec{x}$ diff'bar, $\vec{F}, \vec{x}$ stetig
  Geschwindigkeitsvektor
  vektorielles Streckenelement
  ↳ für Potentialfelder ($\vec{F} = -\operatorname{grad} u$): $\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = u(x(a)) - u(x(b))$ Potentialdifferenz vom Anfangspunkt zum Endpunkt
- **Potential** von $\vec{v}$ mit wegunabhängigem Integral $\quad u(\vec{x}_1) := -\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
- **Laplaceoperator** $\quad \Delta u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$
  ↳ für $n=1$: $\Delta u = u''$
- **Wellengleichung** $\quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$
- Gradientenfelder sind wirbelfrei $\quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$ $\quad f$ zweimal stetig part. diff'bar
- Rotationsfelder sind quellfrei $\quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ $\quad \vec{v}$ zweimal stetig part. diff'bar

6

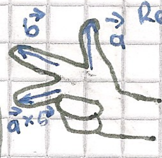
Umrechnung der Koordinatensysteme

kartesisch → zylindrisch	zylindrisch → kartesisch
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $z=z$	$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z=z$
kartesisch → sphärisch	**sphärisch → kartesisch**
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\vartheta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r \cos\vartheta$

Vektoranalysis - Rechenverfahren

Rechenregeln

Rechte-Hand-Regel



Kreuzprodukt / Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Potential $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supseteq G \to \mathbb{R}^3$, G offen

1) notwendige Bedingung $\quad \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ wirbelfrei, $\vec{v}$ stetig diff'bar

2) hinreichende Bedingung $\quad G$: offene konvexe Teilmenge des Definitionsbereiches von $\vec{v}$

$\Rightarrow$ in G existiert Potential für $\vec{v}$

Vektorpotential $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supseteq G \to \mathbb{R}^3$

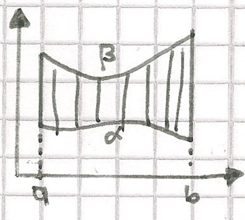
1) notwendige Bedingung $\quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$, $\vec{v}$ stetig diff'bar

2) hinreichende Bedingung $\quad G$ konvex

Analysis II - Klausurvorbereitung

Mehrdimensionale Integration

- **Mehrfachintegration für n=2** $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar, $\alpha \leq \beta$
  $B = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$



$$f: B \to \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow \iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- **Mehrfachintegration für n=3** $B^* \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $\alpha, \beta : B^* \to \mathbb{R}$ diff'bar, $\alpha \leq \beta$
  $B = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B^*, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$

$$f: B \to \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{B^*} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

- **Integration in Polarkoordinaten**

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

- **Flächenelement** $dA = dx\,dy \to \rho\,d\rho\,d\varphi$

- **skalares Oberflächenelement in Kugelkoordinatenparamert.** $dO = R^2 \sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi$

- **glatte Fläche** $\iint_F \delta\,dO := \iint_{\vec{x}} \delta\,dO := \iint_B \delta(\vec{x}) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du\,dv$

- **Oberfläche für $\delta = 1$** $O(F) = \iint_B \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du\,dv$

- **vektorielles Oberflächenelement** $\vec{dO} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\,du\,dv$

- **Divergenzsatz (Integralsatz nach Gauß)** $\iiint_B \operatorname{div} \vec{v}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial B} \vec{v}\,\vec{dO}$
  Die Strombilanz durch geschlossen virtuelle Fläche gibt Aufschluss über die von ihr eingeschlossenen Quellen

- **Integralsatz nach Stokes** $\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO} = \int_{\partial F} \vec{v} \cdot \vec{ds}$ wenn F geschlossen: $\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO} = 0$
  Orientierung des Randes
  von Flächenstücken im dreidimensionalen Raum

Wolfram Alpha Kommando, Beispielfunktion, optionaler Zusatz

– Partielle Ableitungen	derive $f(x,y)=x^2+e^y$ oder partial derivatives $f(x,y)=x^2+e^y$
– Gradient	nabla (x^2-y)
– Hesse-Matrix (2. Ableitung)	hessian matrix $f(x,y)=x^2+e^y$
– Hesseform	hessian determinant $f(x,y)=x^2+e^y$
– lokale Extremstellen + Sattelpunkte	stationary points $f(x,y)=x^2+e^y$ where $2x-y=0$
– globale, lokale Extremstellen	extrema $f(x,y)=x^2+e^y$ where $2x-y=0$
– Divergenz	div (x^2+e^y)
– Rotation	curl (x^2+e^y)
– Laplace-Operator	laplacian (x^2+e^y)
– Jacobi-Determinante	jacobian of (x^2+e^y)
– Jacobi-Matrix	jacobian matrix (x^2+e^y)