Technische Universität Berlin **Sommersemester 2023**
Fakultät II – Institut für Mathematik 20. Juli 2023
Doz.: G. Penn-Karras, P. Winkert
Ass.: F. Borer, J. Halbey, F. Jochmann

Probeklausur „Analysis II für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Erklärung:

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§63 Abs. 2 Satz 3 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§61 Abs. 1 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- In Aufgabe 1 ist jeweils die richtige Aussage anzukreuzen. Es ist immer genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Aussagen in einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt.
- In den Aufgaben 2 bis 10 ist nur das Ergebnis gefragt. Geben Sie keine Rechenwege an.

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 90 Minuten.

In der Klausur sind maximal 60 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Punkte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

1. **Aufgabe (Single Choice)** **(11 Punkte)**

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist **genau eine Antwortmöglichkeit** korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☒ oder ☑). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (■).

(a) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Welche Aussage ist wahr?

☐ Die Menge M ist offen.
☑ Die Menge M ist abgeschlossen.
☐ Die Menge M ist weder offen noch abgeschlossen.
☐ Die Menge M ist offen und abgeschlossen.

Welche Aussage ist wahr?

☐ Die Menge M ist beschränkt.
☑ Die Menge M ist unbeschränkt.

Die gesamte Ebene $z = 0$ ist in M enthalten, daher muss M unbeschränkt sein. Da die Ungleichungen nicht strikt sind, sind alle Randpunkte in M enthalten und somit die Menge abgeschlossen.

(b) Gegeben sei die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} \frac{3n^2}{n^3+7n} \\ \cos(\pi n) \end{pmatrix}.$$

Welche Aussage ist wahr?

☐ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
☑ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, besitzt aber eine konvergente Teilfolge.
☐ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und besitzt keine konvergente Teilfolge.

Die erste Komponente $a_n^{(1)} = \frac{3n^2}{n^3+7n} = \frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{7}{n^2}}$ konvergiert gegen Null für $n \to \infty$. Die zweite Komponente $a_n^{(2)} = \cos(\pi n)$ hingegen alterniert zwischen 1 und -1. Somit sind $\left(a_{2n}^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(a_{2n+1}^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen. Da die erste Komponente konvergiert, sind insbesondere alle Teilfolgen konvergent, das heisst, $\left(a_{2n}^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(a_{2n+1}^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ebenfalls konvergente Teilfolgen. Somit divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, besitzt jedoch konvergente Teilfolgen.

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{y^3}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0; \\ 1, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ist f im Punkt $(0, 0)$ stetig?

☐ Ja, f ist im Punkt $(0, 0)$ stetig. Für alle Nullfolgen $\left(\frac{1}{n^k}, \frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}, k \in \{1, 2, \dots\}$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^k}, \frac{1}{n^k}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1,$$

also existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ und ist gleich dem Funktionswert $f(0, 0)$.

- [x] Nein, f ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig. Es gilt zum Beispiel für die Nullfolge $\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, dass
$$f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{n^3}$$
ist, somit kann der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existieren.
- [ ] Nein, f ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig. Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert zwar, da nach mehrfacher Anwendung der Regel von de L'Hospital gilt, dass
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{\frac{y^3}{x^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}} = \mathrm{e}^3$$
ist, dies entspricht aber nicht dem im Nullpunkt definierten Funktionswert.

(d) Es sei K ein Kreiskegel mit Kegelspitze $(0,2,0)$, dessen Grundfläche durch einen in der Ebene $y=0$ befindlichen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(0,0,0)$ gegeben ist. Welche Menge ist eine Beschreibung von K?

- [ ] $K = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0,2\pi],\ z\in[0,2],\ 0 \le r \le 2z\}$;
- [x] $K = \{(r\cos(\varphi), y, r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0,2\pi],\ y\in[0,2],\ 0 \le r \le 4-2y\}$;
- [ ] $K = \{(r\cos(\varphi), y, r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0,2\pi],\ y\in[0,2],\ r\in[0,4]\}$.

Die erste Menge beschreibt einen Kreiskegel mit Grundfläche in der Ebene $z=2$ und Kegelspitze im Urpsrung. In der dritten Menge sind der Radius r und die y-Höhe unabhängig voneinander. Somit handelt es sich um einen Zylinder und keinen Kegel.

(e) Gegeben seien die Menge
$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2+y^2 < 5\}$$
und eine Funktion $f\colon M\to\mathbb{R}$, die stetig ist auf M und im Inneren von M zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen wahr?

- [ ] Die Funktion f nimmt im Inneren von M mindestens ein globales Minimum und Maximum an.
- [ ] Die Funktion f nimmt im Inneren von M mindestens ein lokales Minimum und Maximum an.
- [ ] Die Funktion f nimmt in M kein lokales Minimum oder Maximum an.
- [x] Die Funktion hat nicht notwendigerweise globale Extrema in M.

Da M nicht kompakt ist, müssen die globalen Extrema nicht notwendigerweise in M liegen.

(f) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Stellen wir das Gleichungssystem der Lagrange-Multiplikatoren unter der Nebenbedingung $g(x,y,z)=0$ auf, so erhalten wir
$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f = \lambda \cdot \operatorname{grad}_{(x,y,z)} g \quad \text{mit} \quad g(x,y,z)=0.$$
Welche Aussage ist wahr?

- [x] Auch jede andere Funktion $\tilde{f} = f + c$ mit $c\in\mathbb{R}$ würde auf das gleiche Gleichungssystem führen.
- [ ] Auch jede andere Funktion $\tilde{f}(x,y,z) = f(x,y,z) + C(x)$ mit $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig würde auf das gleiche Gleichungssystem führen.
- [ ] Auch jede andere Nebenbedingung $\tilde{g}(x,y,z) = g(x,y,z) + c = 0$ würde auf das gleiche Gleichungssystem führen.

Es gilt $\operatorname{grad}_{(x,y,z)}\tilde{f} = \operatorname{grad}_{(x,y,z)}f$. Somit erfüllt $\tilde{f}$ das gleiche Gleichungssystem wie f.

(g) Es sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ ein fester Punkt und es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$. Sei ferner

$$\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

☐ Die Funktion f nimmt ein lokales Maximum in $\vec{x}_0$ an.

☐ Die Funktion f nimmt ein lokales Minimum in $\vec{x}_0$ an.

☑ Die Funktion f hat einen Sattelpunkt in $\vec{x}_0$.

☐ Wir können keine der obigen Aussagen treffen.

Die Eigenwerte von $\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} f$ sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$. Damit ist $\operatorname{Hess}_{\vec{x}_0} f$ indefinit und $\vec{x}_0$ ein Sattelpunkt.

(h) Im Folgenden bezeichnet $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen. Geben Sie an, welcher der Ausdrücke nicht definiert ist:

☑ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\vec{v}))$;

☐ $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v}))$;

☐ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$;

☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$.

Der Gradient ist nicht für Vektorfelder definiert.

(i) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, für die das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ x^2 + z \\ y + z \end{pmatrix}$$

ein Potential $u_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ besitzt.

Das Vektorfeld v hat ein Potential genau dann, wenn f die folgende Form hat:

☐ $f(x,y,z) = 2xy + C(x,z)$;

☐ $f(x,y,z) = x^2 + C(y,z)$;

☐ $f(x,y,z) = x^2y + C(x,z)$;

☑ $f(x,y,z) = 2xy + C(x)$.

Es gilt

$$\operatorname{rot}(\vec{v}(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \\ 2x - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, dass

$$f(x,y,z) = 2xy + C(x,z)$$

ist. Mit der zweiten Gleichung sehen wir ausserdem, dass f unabhängig von z ist. Also hat f die Form

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y,z) = 2xy + C(x),$$

mit $C(\cdot)$ stetig differenzierbar.

(j) Wir betrachten die Kurve

$$\vec{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Parametrisierungen $\vec{\eta}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, dieselbe Kurve wie $\vec{\gamma}$ beschreibt:

- ☐ $\vec{\eta}_1 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{\eta}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix};$
- ☐ $\vec{\eta}_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{\eta}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix};$
- ☑ $\vec{\eta}_3 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{\eta}_3(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix};$
- ☐ $\vec{\eta}_4 : [0,2] \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{\eta}_4(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix};$
- ☐ Keine der Parametrisierungen $\vec{\eta}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, beschreibt dieselbe Kurve wie $\vec{\gamma}$.

2. **Aufgabe (Topologie und Folgen)** **(2 Punkte)**

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} e^{-n} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}} \\ \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

Es gilt $a = \boxed{2}$ und $b = \boxed{-1}$.

Für die erste Komponente gilt,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 2 \cdot 3^0 = 2.$$

Da $\sin(\cdot)$ 2π-periodisch ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

3. **Aufgabe (Stetigkeit)** **(2 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \vec{f}(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} + 1 \\ x^4 y^2 \sin(2y^2) \end{pmatrix}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0); \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Es ist $a = \boxed{1}$ und $b = \boxed{0}$.

Die Funktion $\vec{f}$ ist auf der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ als Kompositionen stetiger Funktionen stetig.

Für die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ betrachten wir für die erste Komponente die allgemeine Nullfolge $\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\frac{r^4\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} + 1 = r^2\cos^3(\varphi)\sin(\varphi) + 1 \to 1 \quad \text{für } r \to 0 \text{ (unabhängig von } \varphi).$$

(Alternativ kann man auch für die Nullfolge $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung

$$\frac{x_k^3 y_k}{x_k^2+y_k^2} + 1 = \frac{x_k^2 x_k y_k}{x_k^2+y_k^2} + 1 \le \frac{(x_k^2+y_k^2)x_k y_k}{x_k^2+y_k^2} + 1 = x_k y_k + 1 \to 1 \quad \textit{für} \quad k \to \infty$$

betrachten.)

Für die zweite Komponente sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge. Für diese gilt

$$|x_k^4 y_k^2 \sin(2y_k^2)| \le |x_k^4 y_k^2| \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

4. **Aufgabe (Differenzierbarkeit)** **(8 Punkte)**

(a) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1).$$

Bestimmen Sie die Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ des Gradienten

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} Ax\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) \\ B\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) \end{pmatrix}$$

sowie die Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ der Hessematrix

$$\operatorname{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) + bx^2\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) & cx\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) \\ -6x\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) & d\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$A = \boxed{2}$; $B = \boxed{-3}$;

$a = \boxed{2}$; $b = \boxed{4}$; $c = \boxed{-6}$; $d = \boxed{-9}$.

Es gilt

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) \\ -3\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\operatorname{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) + 4x^2\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) & -6x\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) \\ -6x\mathrm{e}^{x^2}\sin(3y+1) & -9\mathrm{e}^{x^2}\cos(3y+1) \end{pmatrix}.$$

(b) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = x^2 + y.$$

i. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$ von f in Richtung von

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{im Punkt} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Es gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \boxed{\frac{6}{\sqrt{5}}}$.

ii. Berechnen Sie die erste partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ von f, wobei $\vec{a}$ wie oben gegeben ist, also $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = \boxed{4}$.

i. Da f differenzierbar ist, gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = df_{\vec{a}}(\vec{v})$. Mit $df_{(x,y)} = \begin{pmatrix}2x & 1\end{pmatrix}$ folgt also

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = df_{\vec{a}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

(Alternativ könnte man auch direkt über die Definition rechnen.)

ii. Die erste partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ entspricht der Richtungsableitung in Richtung $\vec{e}_1$. Somit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(\vec{a}) = df_{\vec{a}}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4.$$

5. **Aufgabe (Taylor, Fehlerschranken, Koordinatensysteme) (4 Punkte)**

(a) Wir betrachten eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(1,0) = 3, \quad \operatorname{grad}_{(1,0)} f = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Hess}_{(1,0)} f = \begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(f)$ von f im Entwicklungspunkt $(1,0)$ kann in der Form

$$(T_2 f)(x,y) = 3 + 3(x-1) - 2y + a(x-1)^2 + b(x-1)y + y^2$$

dargestellt werden. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$a = \boxed{-3}, \quad b = \boxed{3}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= f(1,0) + (x-1,y)\cdot \operatorname{grad}_{(1,0)} f + \frac{1}{2}\cdot (x-1,y)^T \cdot \operatorname{Hess}_{(1,0)} f \cdot (x-1,y) \\ &= 3 + 3(x-1) - 2y + \frac{-6}{2}(x-1)^2 + \frac{3+3}{2}(x-1)y + \frac{2}{2}y^2. \end{aligned}$$

(b) Gegeben sei eine Funktion $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 3\} \to \mathbb{R}$ mit Gradienten

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ möglichst klein, sodass $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{p})\right| \le a$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p})\right| \le b$ für alle $\vec{p} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 3\}$ gilt.

Es ist $a = \boxed{27}$ und $b = \boxed{3}$.

Da beide partiellen Ableitungen monoton auf den entsprechenden Intervallen sind, reicht es aus die Intervallgrenzen einzusetzen und den betragsmäßig größeren Wert auszuwählen. Es gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(2, y)\right| = |2^3| = 8, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(3, y)\right| = |3^3| = 27$$

und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, -1)\right| = |-(-1)| = 1 \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, 3)\right| = |-3| = 3.$$

6. **Aufgabe (Extrema)** **(4 Punkte)**

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y) = (x + 1)^3 + 3(y^2 + 1)^2$$

und der kritische Punkt $\vec{x}_{\text{krit}} = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ von f, das heisst, es gilt $\operatorname{grad}_{\vec{x}_{\text{krit}}} f = \vec{0}$. Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\vec{x}_{\text{krit}}$ sei dargestellt durch

$$\operatorname{Hess}_{\vec{x}_{\text{krit}}} f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie a und b.

Es ist $a = \boxed{0}$ und $b = \boxed{12}$.

Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x + 1)^2 \\ 12y(y^2 + 1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{x}_{\text{krit}}$$

und

$$\operatorname{Hess}_{(x,y)^T} f = \begin{pmatrix} 6(x + 1) & 0 \\ 0 & 36y^2 + 12 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \operatorname{Hess}_{\vec{x}_{\text{krit}}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = Ax^2y + B\cos(y)z,$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$, und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Stellen wir das Gleichungssystem der Lagrange-Multiplikatoren auf, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(1) & 10xy &= 2\lambda x;\\
&(2) & 5x^2 - 7\sin(y)z &= 2\lambda y;\\
&(3) & 7\cos(y) &= 2\lambda z,
\end{aligned}
$$

und die Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$.
Bestimmen Sie A und B.

Es gilt $A = \boxed{5}$ und $B = \boxed{7}$.

Wegen der Bedingung $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ muss insbesondere

$$
\begin{aligned}
2Axy &= 10xy;\\
Ax^2 - B\sin(y)z &= 5x^2 - 7\sin(y)z;\\
B\cos(y) &= 7\cos(y),
\end{aligned}
$$

gelten und somit ist $A = 5$ und $B = 7$.

7. **Aufgabe (Potentiale)** **(2 Punkte)**

Sei

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3xy \\ x^2 e^z - 8x\cos(z) \\ 3yz \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass das Vektorfeld

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 e^z \\ axyz \\ bx^2\cos(z) + 1 \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist.

Es gilt $a = \boxed{3}$ und $b = \boxed{4}$.

Damit $\vec{w}$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist, muss

$$\vec{v}(x, y, z) = \operatorname{rot}(\vec{w})(x, y, z)$$

gelten. Wir haben

$$\operatorname{rot}(\vec{w})(x, y, z) = \begin{pmatrix} -axy \\ x^2 e^z - 2bx\cos(z) \\ ayz \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -3xy \\ x^2 e^z - 8x\cos(z) \\ 3yz \end{pmatrix},$$

also $a = 3$ und $b = 4$.

8. **Aufgabe (Kurven- und Oberflächenintegrale)** **(10 Punkte)**

(a) Seien

$$\vec{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\quad \vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x+3y)\end{pmatrix}$$

und

$$\vec{\gamma}:[1,2]\to\mathbb{R}^2;\quad \vec{\gamma}(t)=\begin{pmatrix}2t\\ t^3\end{pmatrix}.$$

Schreiben wir das Kurvenintegral von $\vec{v}$ entlang von $\vec{\gamma}$ hin, so erhalten wir

$$\int_{\vec{\gamma}}\vec{v}\cdot\vec{ds}=\int_1^2(a\cos(2t)+3t^2\sin(b(t)))dt.$$

Bestimmen Sie $a\in\mathbb{R}$ und die stetige Funktion $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Es gilt $a=$ $\boxed{2}$ und $b(t)=$ $\boxed{2t+3t^3}$.

Es gilt

$$\int_{\vec{\gamma}}\vec{v}\cdot\vec{ds}=\int_1^2\left\langle\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t+3t^3)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 3t^2\end{pmatrix}\right\rangle dt=\int_1^2(2\cos(2t)+3t^2\sin(2t+3t^3))dt,$$

also $a=2$ und $b(t)=2t+3t^3$.

(b) Notieren Sie das Integral

$$\int_0^2\int_0^{x^2}xdydx$$

in der Form

$$\int_a^b\int_c^d xdxdy$$

mit geeigneten Grenzen a,b,c,d, die von x oder y abhängen können.

Es gilt $a=$ $\boxed{0}$, $b=$ $\boxed{4}$, $c=$ $\boxed{\sqrt{y}}$, $d=$ $\boxed{2}$.

Für y gilt

- $y\leq x^2$, $x\leq 2\Rightarrow y\leq 4$;
- $y\geq 0$.

Für x gilt

- $0\leq y\leq x^2\Rightarrow\sqrt{y}\leq x$;
- $x\geq 2$.

Damit folgt

$$\int_0^2\int_0^{x^2}xdydx=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 xdxdy,$$

also $a=0$, $b=4$, $c=\sqrt{y}$, $d=2$.

(c) Eine Parametrisierung der Mantelfläche M eines Kegels ist gegeben durch

$$\vec{\eta}:[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3;\quad \vec{\eta}(r,\phi)=\begin{pmatrix}r\cos(\phi)\\ r\sin(\phi)\\ 1-r\end{pmatrix}.$$

Der Ansatz zur Berechnung des Flächenintegrals der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^3$$

führt auf das Integral

$$\begin{aligned}\iint_M f dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^a r^b \left\| \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \phi}(r, \phi) \right\| dr d\phi \\ &= A \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^a r^b r^c dr d\phi\end{aligned}$$

für $a, b, c, A \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b, c, A.

Es gilt $a = \boxed{3}$, $b = \boxed{2}$, $c = \boxed{1}$, $A = \boxed{\sqrt{2}}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \phi}(r, \phi) \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right\| = r\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi + 1} = \sqrt{2}r.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$f(\vec{\eta}(r, \phi)) = r^2(1-r)^3, \quad r \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Damit ergibt sich das Flächenintegral

$$\begin{aligned}\iint_M f dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\vec{\eta}(r, \phi)) \left| \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \phi}(r, \phi) \right| dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(1-r)^3 \left| \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \phi}(r, \phi) \right| dr d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^3 r^2 r dr d\phi.\end{aligned}$$

9. **Aufgabe (Mehrdimensionale Integration)** **(8 Punkte)**

Gegeben seien die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

Unter Verwendung der Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_c^d r^j \sin^k(\varphi) \cos^l(\varphi) \sin^m(\theta) dr d\theta d\varphi$$

für $a, b, c, d, j, k, l, m \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a, b, c, d, j, k, l, m. Es gilt

$a = \boxed{0}$, $b = \boxed{\pi}$, $c = \boxed{1}$, $d = \boxed{3}$,

$j = \boxed{4}$, $k = \boxed{0}$, $l = \boxed{0}$, $m = \boxed{3}$.

Wir schreiben f in Kugelkoordinaten um. Das liefert uns

$$\begin{aligned}
f(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) &= x^2(r,\theta,\varphi) + y^2(r,\theta,\varphi) \\
&= (r\sin(\theta)\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\theta)\sin(\varphi))^2 \\
&= r^2\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r^2\sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Koordinatentransformation in Kugelkoordinaten, müssen wir noch zusätzlich die Funktionaldeterminante betrachten, die in diesem Fall gleich $r^2\sin(\theta)$ ist.

Damit ergibt sich der Integrand $r^4(\sin(\theta))^3$, also $j = 4$, $m = 3$ und $k = l = 0$.

Der Körper K bezeichnet die Hohlkugel mit $r \in [1, 3]$. Damit folgen die Grenzen für die Winkel.

10. **Aufgabe (Integralsätze)** (9 **Punkte**)

(a) Sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}$ die obere Halbkugel mit Radius $r = 3$. Im Folgenden sei ∂K so parametrisiert, dass das Oberflächenelement nach außen zeigt. Sei ferner

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = a \cdot \text{Volumen}(K).$$

ist.

Es gilt $a = \boxed{5}$.

Es gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v})(x, y, z) = 5.$$

Mit dem Satz von Gauss folgt nun

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint_K \operatorname{div}(\vec{v})(x, y, z)dxdydz \\
&= \iiint_K 5dxdydz = 5 \cdot \text{Volumen}(K).
\end{aligned}$$

(b) Seien

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

und

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie unter Verwendung der Zylinderkoordinaten und des Satzes von Gauss die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^3 b r^c \cos(\varphi) dz d\varphi dr$$

ist. Der Rand ∂K von K sei dabei so parametrisiert, dass die Normale auf ∂K nach aussen zeigt.

Es gilt $a = \boxed{\sqrt{2}}$, $b = \boxed{2}$, $c = \boxed{2}$.

Der Körper K ist ein Halbzylinder. Für dessen Parametrisierung verwenden wir daher (wie vorgegeben) Zylinderkoordinaten und erhalten

$$\Phi : [0,\sqrt{2}] \times [0,\pi] \times [0,3] \to \mathbb{R}^3; \quad \Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit Volumenelement $r = |\det(\Phi'(r,\varphi,z)|$. Ferner gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v})(x,y,z) = 2x.$$

Daher gilt mit dem Satz von Gauss, dass

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{v})(x,y,z) dx dy dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \cos(\varphi) dz d\varphi dr$$

ist

(c) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ 3xz \\ -2xy \end{pmatrix}.$$

Es sei F eine glatte Fläche mit der Randkurve ∂F parametrisiert durch

$$\vec{\gamma}(t) : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^\pi (a\cos^p(2t) + b\sin^p(2t))\,\mathrm{d}t$$

mit Konstanten $a, b, p \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $a, b, p \in \mathbb{R}$.

Es gilt $a = \boxed{6}$, $b = \boxed{-2}$ und $p = \boxed{2}$.

Andererseits gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{F} \begin{pmatrix} cx \\ dy \\ 2z \end{pmatrix} \cdot d\vec{O}$$

mit Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$.

Dann ist $c = \boxed{-5}$, $d = \boxed{3}$.

Es gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 3\cos(2t) \\ -2\cos(2t)\sin(2t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^\pi (-2\sin^2(2t) + 6\cos^2(2t)) dt.$$

Andererseits gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \ = \ \iint\limits_{F} \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \ \iint\limits_{F} \begin{pmatrix} -5x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{O}.$$