TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 26.04.11–29.04.11 im Tutorium

1. Übung Analysis II für Ingenieure

(Topologie und Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2,\ |y| < 1\},\\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 2,\ |y| < 1, z = 2\},\\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in [-1,1]\},\\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3, |x| < 2\},\\
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4\},\\
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 \leq 4\}.
\end{aligned}
$$

Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind offen, welche sind beschränkt, welche abgeschlossen oder kompakt?

2. Aufgabe

(a) Finden Sie eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, sodass

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \{\varnothing, \mathbb{R}^2\}$$

abgeschlossen ist.

(b) Finden Sie zwei unbeschränkte nicht-abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, deren Durchschnitt kompakt ist.

(c) Wahr oder falsch? Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und unbeschränkt ist, dann ist $A^c := \mathbb{R}^2 \setminus A$ kompakt.

In (c) geben Sie bitte eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an!

3. Aufgabe

(i) Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\vec{a}_k = \left(\tfrac{k^2\cos(k\pi)+2k}{k^2+1}, \arctan(k)\right), \quad \vec{b}_k = \left(\int_{\frac{1}{k}}^{1} 1\,dt, \int_1^k \frac{1}{t^2+1}\,dt\right),$$

$$\vec{c}_k = \left(e^{\frac{1}{k}}, \ln(\tfrac{k}{2k+1})\right).$$

(ii) Betrachten Sie die Folge

$$\vec{w}_k = \left(\cos(k\pi) + k^2 e^{-k}, \sin(\tfrac{\pi k}{4}) + \tfrac{1}{k^2}\right) \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Finden Sie eine Teilfolge $(\vec{w}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die gegen $(1,0)$ konvergiert und eine Teilfolge $(\vec{w}_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ die gegen $(1,1)$ konvergiert. Ist die Folge $(\vec{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 y < 16\}, \\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos x = 0,\ |y| \leq 1\}, \\
C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| < 4,\ 0 < z < 2\}, \\
D &= C \cap \mathbb{Z}^3 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}.
\end{aligned}$$

Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind abgeschlossen oder kompakt, welche sind offen?

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Finden Sie eine abgeschlossene Teilmenge A des $\mathbb{R}^2$ mit $A \notin \{\varnothing, \mathbb{R}^2\}$, sodass weder A noch das Komplement $A^c := \mathbb{R}^2 \setminus A$ kompakt ist.

(b) Wahr oder falsch? Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, dann ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

(c) Wahr oder falsch? Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, dann ist auch $A \cap B$ offen.

In (b) und (c) geben Sie bitte jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an!

3. Aufgabe (6 Punkte)

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\vec{a}_k = \left(\tfrac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right), \tfrac{(-1)^k}{k^2}\right), \quad \vec{b}_k = \left(\int_0^k \tfrac{dt}{t^2+2t+1}, \arctan\left(e^{k^2}\right)\right),$$

$$\vec{c}_k = \left(e^{\frac{1}{2}i\pi k}, \tfrac{k^{-k}-1}{\arctan(k)-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 02.05.11–06.05.11 im Tutorium

2. Übung Analysis II für Ingenieure

(Konvergenz im $\mathbb{R}^n$, Abbildungen, Funktionen, Stetigkeit)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Betrachten Sie die Einheitskreisschreibe $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und einen Punkt $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$ außerhalb dieser Menge. Geben Sie eine Funktion f an, die den Euklidischen Abstand eines Punktes $\vec{x} \in K$ zu $\vec{a}$ beschreibt.

(a) Skizzieren Sie K, $\vec{a}$ und einige Niveaulinien von f in Abhängigkeit von $\vec{a}$.

(b) Nimmt f Minimum und Maximum an? Falls ja, wo?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin(\frac{1}{x^4}) + 2, & \text{falls } x \neq 0 \\ 2, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

3. Aufgabe

(a) Finden Sie eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ und eine Folge $(\vec{x}_k)$ in A derart, dass $(\vec{x}_k)$ keine in A konvergente Teilfolge enthält.

(b) Finden Sie eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ und eine Folge $(\vec{x}_k)$ in A, die zwar konvergiert, deren Grenzwert $\vec{a}$ aber außerhalb von A liegt. Bestimmen Sie ferner

   (i) eine in $\vec{a}$ nicht stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass die Folge $(\vec{x}_k)$ verwendet werden kann, um zu zeigen, dass f wirklich nicht in $\vec{a}$ stetig ist.

   (ii) eine in $\vec{a}$ nicht stetige Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass die Folge $(\vec{x}_k)$ nicht dazu verwendet werden kann, um zu zeigen, dass g in $\vec{a}$ nicht stetig ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien der Vektor $\vec{a} = (4,6)^T$ und die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

definiert auf dem Gebiet $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

(a) Begründen Sie, warum f mindestens ein globales Minimum und Maximum auf D besitzt.

(b) Skizzieren Sie D und einige Niveaulinien von f.

(c) Bestimmen Sie das globale Minimum von f.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Geben Sie bei wahren Aussagen eine Begründung, bei falschen Aussagen ein passendes Gegenbeispiel an.

(a) Die Menge $M := \{e^{-k} \,|\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist kompakt.

(b) Wenn die Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ divergiert, so divergiert auch die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $z_k := x_k + y_k$.

(b) Wenn die Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $z_k := x_k + y_k$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Menge aller Punkte, in denen sie stetig sind.

(i)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(ii)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \arctan\left(\frac{1}{x-y}\right) & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 09.05.11–13.05.11 im Tutorium

3. Übung Analysis II für Ingenieure

(Differentiation)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Gegeben sei die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x^2 \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mittels der Definition der Differenzierbarkeit, dass $\vec{f}$ differenzierbar ist und dass für die Ableitung von $\vec{f}$ gilt:

$$\vec{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

(a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix der Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$$

und bestimmen Sie die Ableitung an der Stelle $(1, 0, 0)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ für $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

(b) Berechnen Sie die Funktionalmatrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \frac{e^x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

und bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von g an der Stelle $(0, 0)$.

3. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{x\,y}{x^4+y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei A eine reelle 3×3- Matrix und $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \vec{x}\mapsto A\vec{x}$ die von A induzierte lineare Abbildung. Geben Sie die Funktionalmatrix von $\vec{f}$ an.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: D\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}}$$

mit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\leq 1\}$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionalmatrix von f an der Stelle $(1,0)$.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von f an der Stelle $(0,1)$ in Richtung $\frac{1}{5}(3,4)$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an f an der Stelle $(1,1)$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Es sei die Funktion $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$h(x,y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{x^3-x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass h im Punkt $(0,0)$ stetig und partiell differenzierbar, aber nicht differenzierbar ist.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 16.05.11–20.05.11 im Tutorium

4. Übung Analysis II für Ingenieure

(Gradient, Rechenregeln)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Gegeben seien die drei Abbildungen

$$\vec{f}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{f}_2(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, (r,\phi) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_3(x,y) = x^2 + y^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Für eine der drei Abbildungen ist der Gradient erklärt. Welche ist es? Zeichnen Sie den Graphen dieser Abbildung. Berechnen Sie den Gradienten. Fertigen Sie eine Skizze des Gradientenfeldes an – das ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto \operatorname{grad}_{(u,v)} \vec{f}.$$

Wie verhält sich der Gradient bzgl. des Änderungsverhaltens von $\vec{f}$?
Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\vec{f}$ an der Stelle $(1,1)$ in die Richtung $\vec{u} = (1,0)$.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, &\quad \vec{f}(x,y) = (x-2y, e^x, x)^T,\\
\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, &\quad \vec{g}(x,y) = (x^2, -2y, e^{x+y})^T\\
\text{und } h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, &\quad h(x,y,z) = e^{xy} + z^2.
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie die Funktionalmatrix von

(i) $\vec{f} \cdot \vec{g}$ an der Stelle $(0,0)$

(ii) $\vec{f} \times \vec{g}$ an der Stelle $(0,0)$

(iii) $h \circ \vec{f}$ an der Stelle $(0,0)$

einmal direkt und einmal mit einer entsprechenden Rechenregel.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Eine Temperaturverteilung im Raum sei gegeben durch die Funktion

$$T(x,y,z) = 10 + 6\cos(x)\cos(z) - 3\cos(2x)\cos(2z)\,.$$

Bestimmen Sie im Punkt $P_0 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

(a) die Richtung des größten Temperaturanstiegs und die des größten Temperaturabfalls;

(b) alle Richtungen, in denen sich die Temperatur nicht ändert.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel $(\vec{f} \circ \vec{g})'(1,2)$, wobei $\vec{f}$ und $\vec{g}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad &, \qquad \vec{f}(u,v) = (u^2 + e^v, \ln(1+u^2), e^{u+v})^T \\ \vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad &, \qquad \vec{g}(x,y) = (x+y, xe^y)^T. \end{aligned}$$

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel $(g \circ \vec{f})'(t)$, wobei g und $\vec{f}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad &, \qquad g(x,y,z) = e^{x-z}(y - z^2) \\ \vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad &, \qquad \vec{f}(t) = (2t, 2t^2, t)^T\ . \end{aligned}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Seien die Abbildungen

$$\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (\arctan(y^2), 0, \sin(x))^T, \quad \vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (y, x^2, 0)^T$$

gegeben. Bestimmen Sie:

(i) die Funktionalmatrix von $\vec{g} \times \vec{h}$ an der Stelle $(\pi, 0)$;

(ii) die Funktionalmatrix von $\vec{g} \cdot \vec{h}$ an der Stelle $(\pi, 0)$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 23.05.11–27.05.11 im Tutorium

5. Übung Analysis II für Ingenieure

(Koordinatensysteme, Fehlerschrankensatz)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $\vec{f} : [0, \infty[\times[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung von Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{f}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)^T$.

a) Geben Sie die Koordinatenflächen der Zylinderkoordinaten an und skizzieren Sie diese.
Dabei sind die *Koordinatenflächen* definiert als die Flächenscharen im $\mathbb{R}^3$, die entstehen, wenn man je eine Koordinatenrichtung als konstant annimmt.
(Beispielsweise ist bei den üblichen kartesischen Koordinaten durch $x_3 = c$, c konstant, die Schar von Koordinatenflächen $(x, y) \mapsto (x, y, c)$ gegeben. Diese sind aber gerade die zur xy-Ebene parallelen Ebenen auf Höhe c.)

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$.

c) Welche geometrischen Objekte werden durch das Bild von $\vec{f}$ dargestellt, wenn

i) nur der Winkel φ im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ variiert wird und ρ und z fest sind,

ii) der Winkel φ im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ und die Höhe z im Intervall $[-1, 2]$ variiert werden und ρ fest bleibt,

iii) der Winkel φ im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$, die Höhe z im Intervall $[-1, 2]$ und der Radius ρ im Intervall $[0, 2]$ variiert werden?

Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl der variierten Parameter und der Art des geometrischen Objekts (Kurve/Fläche/Volumen), das damit beschrieben wird.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = 9, z = 1$$

in Zylinderkoordinaten. Fertigen Sie eine Skizze an!

e) Gegeben sei $D := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ und die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $q : K \to \mathbb{R}$, $q = g \circ \vec{f}$ direkt sowie mit der Kettenregel, wobei $K := \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0\}$.

2. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2 e^y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zeigen Sie mittels Polarkoordinatentransformation, dass $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

3. Aufgabe

Sie möchten die Gravitationskonstante g ermitteln, indem Sie einen Stein von einer hohen Brücke in den darunter fließenden Fluss fallen lassen. Die Fallzeit beträgt etwa 3.0 ± 0.1 s. Der Höhenunterschied zwischen Brücke und Wasseroberfläche beträgt im Mittel 44.5 m. Die Wasserhöhe schwankt wellenbedingt um $\pm$ 10 cm.

a) Ermitteln Sie g näherungsweise aus Ihren Messdaten.
Hinweis: Die zurückgelegte Strecke s und die benötigte Zeit t stehen in der Beziehung $s = \frac{1}{2}gt^2$.

b) Schätzen Sie den absoluten Fehler mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes ab.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $\vec{f} : [0,\infty[\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung von Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{f}(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)^T$.

a) Geben Sie die Koordinatenflächen (vgl. erste Tutoriumsaufgabe) der Kugelkoordinaten an und skizzieren Sie diese.

b) Im Gegensatz zu Koordinatenflächen werden bei *Koordinatenlinien* alle bis auf eine Koordinatenrichtung als konstant angenommen. Beschreiben Sie kurz die Koordinatenlinien der Kugelkoordinaten.

c) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von $\vec{f}$.

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g \circ \vec{f}$ einmal direkt und einmal mit der Kettenregel, wobei

$$g(x,y,z) = x\ln(x^2+y^2+z^2).$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungssysteme in Polarkoordinaten:

a) $2y = 3x$, $x^2+y^2 \geq 4$;

b) $x^2+y^2 \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels der Länge $L = 2m$ beträgt etwa $T = 2.9s$. Die Schwingungsdauer eines solchen Pendels genügt dabei der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ .$$

Dabei ist L mit einer Genauigkeit von $\pm 0.001m$ und T mit einer Genauigkeit von $\pm 0.2s$ gemessen worden.

a) Ermitteln Sie g näherungsweise aus Ihren Messdaten.

b) Schätzen Sie den absoluten Fehler mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes ab.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 30.05.11–03.06.11 im Tutorium

6. Übung Analysis II für Ingenieure

(Extrema, Satz von Taylor)

Dies ist das letzte Blatt, dass für die erste Semesterhälfte zählt.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es sei die Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y > 0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^y$$

gegeben. Bestimmen Sie die zu f gehörige Taylorformel zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$ und berechnen Sie hierdurch näherungsweise $f(1.1, 1.2)$ sowie $f(0.9, 1.3)$.

2. Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion

$$f : R^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2\alpha x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 8y + 1.$$

Finden Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die kritischen Stellen von f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle handelt.

3. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = (x - y)^2 + (x + 2y + 2)^2 + y^2 z^2$$

auf lokale Extrema. Bestimmen Sie in allen kritischen Punkten das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x}e^{y^2}$$

gegeben. Bestimmen Sie die zu f gehörige Taylorformel zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 0)$ und berechnen Sie hierdurch näherungsweise $f(1.1, -0.1)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Die Wirkung $W(x, t)$ von x ml Hustensaft t Minuten nach deren Einnahme werde durch eine Funktion der Form

$$W(x, t) = cx^2(50 - x^2)te^{-\frac{1}{3}t}$$

beschrieben, wobei c ein positiver Parameter ist. Bestimmen Sie die Kombination(en) von Dosis x und Zeit t, bei denen die Wirkung maximal wird.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2$$

auf lokale Extrema. Bestimmen Sie in allen kritischen Punkten das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 06.06.11–10.06.11 im Tutorium

7. Übung Analysis II für Ingenieure

(Extrema mit Nebenbedingungen, Klassische Differentialoperatoren)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 3xy$$

auf den folgenden Definitionsbereiche:

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2\}$,

(ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 \le 1\}$.

Untersuchen Sie f im Innern von D auf lokale Extrema und auf ganz D auf globale Extrema.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie den Punkt (x_0, y_0) aus der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 4y = 0\},$$

der zum Punkt $(0, 1)$ minimalen Abstand hat. Formulieren Sie dazu eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung. (Minimieren Sie das Quadrat des Euklidischen Abstands.)

(a) Lösen Sie das Problem, indem Sie die Gleichung $x^2 - 4y = 0$ verwenden, um y aus der zu minimierenden Funktion zu eliminieren.

(b) Eliminieren Sie nicht y sondern x^2. Was passiert?

(c) Verwenden Sie den Langrangezugang!

Argumentieren Sie, warum es sich bei dem gefundenen kritischen Punkt wirklich um eine Minimalstelle handelt.

3. Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{xy}, \\ g(x,y,z) &= x + y^2 + z^3, \end{aligned}$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{grad}(fg)$, $\operatorname{div}(f\vec{v})$, $\operatorname{rot}(f\vec{v})$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to \mathbb{R}; \\ & (x, y) \mapsto 2x^2 - 4xy + 2y^2 \end{aligned}$$

auf den folgenden Definitionsbereichen:

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 2\}$,

(ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 2x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Untersuchen Sie f im Innern von D auf lokale Extrema und auf ganz D auf globale Extrema.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Es soll eine Konservendose mit vorgeschriebenem Volumen V_0 hergestellt werden. Die Dose soll die Form eines Kreiszylinders haben. Seien g der Flächeninhalt der Grundfläche und h der Flächeninhalt der Mantelfläche. Die Herstellungskosten für einen Deckel betragen $c_1 g$ und für die Mantelfläche $c_2 h$, wobei $c_1, c_2 > 0$. Wie müssen g und h (in Abhängigkeit von c_1 und c_2) gewählt werden, damit die Produktionskosten möglichst gering ausfallen?

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy \sin z, \\ g(x, y, z) &= \sqrt{1 + z^2} + x \cos y, \\ \vec{v}(x, y, z) &= \left(x + y^2, \quad \sin z, \quad x^2 + y\right)^T. \end{aligned}$$

Berechnen Sie: grad f, grad g, div $\vec{v}$, rot $\vec{v}$, div $(f\vec{v})$, rot $(f\vec{v})$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 14.06.11–17.06.11 im Tutorium

8. Übung Analysis II für Ingenieure

(Mehrfachanwendungen der Diff.operatoren, Potentiale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Für die laminare Rohrströmung (zähe Flüssigkeit wird durch ein zur $y-$ Achse koaxiales Rohr mit Radius r mit geringer Geschwindigkeit gepreßt) gilt

$$\vec{v}(x,y,z) = c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - x^2 - z^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $c > 0$ und $\vec{v} : G \to \mathbb{R}$ mit $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq r^2\}$.

a) Zeigen Sie anschaulich (Skizze!), dass $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$ ist.

b) Berechnen Sie die Volumenverzerrung der Strömung.

c) Angenommen, durch Reibung etc. klingt die Strömungsgeschwindigkeit exponentiell in y-Richtung ab so dass sich ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{\tilde{v}} = e^{-y}\vec{v}$ einstellt. Wie groß ist dann die Volumenverzerrung?

d) Angenommen in die Flüssigkeit sei eine weitere Substanz mit anfänglicher Volumendichte $\rho(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$ eingebracht. Für die instantane Veränderung der Dichte $\eta = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ dieser Substanz gilt die Kontinuitätsgleichung $\eta = -\operatorname{div}(\rho\vec{v})$. An welchen Punkten erzeugt die Strömung dann keine instantane Dichteveränderung?

2. Aufgabe

Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(\vec{x}, t) := t^{-\frac{3}{2}} exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

3. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Ausdrücke definiert sind. Berechnen Sie diese, falls dies möglich ist, für

$$u(x,y,z) = xyz, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}:$$

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}(\vec{w} - u\vec{v})$ b) $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\vec{w}$ c) $\operatorname{grad}\Delta u$

4. Aufgabe

(i) Hat das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 + 6xz \\ -6xy \\ 3x^2 - 3z^2 \end{bmatrix},$$

ein Potential? Hat $\vec{v}$ ein Vektorpotential?

(ii) Geben Sie ein Potential u von $\vec{v}$ an und zeigen Sie, dass u eine harmonische Funktion ist, d.h. $\Delta u = 0$ gilt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := |\vec{k}|$. Sei weiter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion. Man zeige: Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(\vec{x}, t) := f(<\vec{k}, \vec{x}> -\omega t)$ ist eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\Delta F - 2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

a) Weise nach, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

die Laplacegleichung

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1}$$

in $n = 2$ Dimensionen erfüllt.

b) Überprüfe, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

eine Lösung der dreidimensionalen Laplacegleichung (1) ist.

c) Eine schwingende Saite wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt t am Ort x und $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ und zweimal differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ setze

$$u(x, t) = C_1 f(x - ct) + C_2 g(x + ct).$$

Weise nach, dass u eine Lösung der Schwingungsgleichung (2) ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$u(x, y, z) = xy + xz + yz$$

sowie die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 3 \\ 2yx \end{pmatrix}, \quad \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Welche der Ausdrücke

a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(\vec{w} \cdot \vec{v})$ b) $\operatorname{rot} \operatorname{div}(\vec{w} - u\vec{v})$ c) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$

sind erklärt? Berechnen Sie sämtliche Ausdrücke, die definiert sind.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -yz \sin(xy) \\ -xz \sin(xy) + y \\ \cos(xy) + z^5 \end{pmatrix}$$

ein Potential besitzt.

(ii) Berechnen Sie alle Potentiale von $\vec{v}$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 20.06.11–24.06.11 im Tutorium

9. Übung Analysis II für Ingenieure

(Andere Koordinaten, Parametrisierungen, Kurvenintegrale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Gegeben sei das skalare Feld

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Berechnen Sie Δu einmal direkt und einmal mittels Kugelkoordinaten unter Verwendung der Formel

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\frac{\partial(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta})}{\partial \theta}.$$

2. Aufgabe

a) Parametrisieren Sie den Kreis in der Ebene $z = x$ im $\mathbb{R}^3$ mit dem Mittelpunkt $(4, 4, 4)$ und dem Radius 3, der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

b) Parametrisieren Sie den Meridian der Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit dem Radius 4 und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, dessen Projektion auf die $xy-$Ebene auf die Gerade $y = 2x$ fällt.

3. Aufgabe

Es seien gegeben

$$\text{i) } \vec{v}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ z \\ 2y \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \le t \le 1,$$

$$\text{ii) } \vec{v}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x + 3z^2 \\ 6yz \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos^2 t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Entscheiden Sie ob es sich um Potentialfelder handelt? Ggf. berechne Sie ein Potential! Berechnen Sie desweiteren die Kurvenintegrale $\int_{\vec{x}_i} \vec{v}_i \, \vec{ds}$, $i = 1, 2$.

4. Aufgabe

a) Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Kurve ('Kardioide') und berechnen ihre Bogenlänge.

$$\vec{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

b) Bestimmen Sie auch das Kurvenintegral der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^\top \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ über der Kardioide.

Hinweis: Es gilt $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das skalare Feld

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\} \to \mathbb{R}, \quad u(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Berechnen Sie Δu in Zylinderkoordinaten unter Verwendung der Formel

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Parametrisieren Sie die folgenden Mengen als als Kurven $\vec{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ bzw. $\vec{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

a) Die Schnittlinie der Einheitssphäre

$$S^2 := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

mit dem Kreiskegel

$$\mathcal{P} := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} = z\right\}.$$

b) Der Graph der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$.

c) Die Ellipse

$$\mathcal{C} := \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16\right\}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien gegeben

i) $\vec{v}_1(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 1$,

ii) $\vec{v}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2\pi$.

Entscheiden Sie ob es sich um Potentialfelder handelt? Ggf. berechne Sie ein Potential! Berechnen Sie desweiteren die Kurvenintegrale $\int_{\vec{x}_i} \vec{v}_i \, \vec{ds}$, $i = 1,2$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Länge der logarithmischen Spirale

$$\vec{c} : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\vec{x}) = |x|^2$ längs $\vec{c}$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 27.06.11–01.07.11 im Tutorium

10. Übung Analysis II für Ingenieure

(Mehrdimensionale Integration)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Integrale

a)
$$\int_3^4 \int_1^2 (y+1)x^y \, dx \, dy.$$

b)
$$\int_0^2 \int_0^1 (2-xy) \, dx \, dy$$

c)
$$\int_0^1 \int_0^2 (2-xy) \, dy \, dx$$

d)
$$\int_1^2 \int_2^3 \int_{1/y}^{y} e^{2x-y} \left(z^3 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{27}{4}z - \frac{27}{8} \right) \cos y \, dx \, dy \, dz$$

2. Aufgabe

Berechnen Sie mit Hilfe eines geeigneten Bereichsintegrals das Volumen des Tetraeders Q im $\mathbb{R}^3$, das durch den Schnitt des ersten Oktanten mit der Halbebene $\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 | 3x + 4y + 2z \leq 12\}$ entsteht. Überprüfen Sie das Ergebnis mit der bekannten Pyramidenformel für das Volumen eines Kegels $\mathrm{V(K)} = \frac{1}{3}A \cdot h$, wobei A die Grundfläche und h die Höhe eines Kegels K bezeichnen.

3. Aufgabe

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0,0),(4,0),(4,3)$ mit konstanter Flächenmassendichte.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Berechnen Sie

(a) $\int_1^2 \int_3^4 yx^{y-1} dydx$

(b) $\int_\pi^{3\pi} \int_0^3 x^2 \sin y dxdy$

(c) $\int_0^1 \int_x^{1+x^2} xydydx$

(d) $\int_0^1 \int_1^{e^x} \int_{\frac{x}{y}}^{\frac{1}{y}} e^{yz} dzdydx.$

Skizzieren Sie zu c) den Integrationsbereich.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der Menge in $\mathbb{R}^3$, die als Schnittmenge der Zylinder $Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 1\}$ und $Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y^2+z^2 \leq 1\}$ entsteht.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ die kompakte Menge , welche durch die Kurven $y = \frac{4}{x}$, $y = 4x^2$ und $y = 2$ begrenzt wird.

(a) Berechnen Sie

$$\iint_M 1 dxdy.$$

(b) Berechnen Sie näherungsweise den Schwerpunkt von M unter der Annahme, dass M konstante Flächenmassendichte habe.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 04.07.11–08.07.11 im Tutorium

11. Übung Analysis II für Ingenieure

(Integral-Transformationssatz in $\mathbb{R}^n$)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Skizzieren Sie grob die Menge

$$M \ := \ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le 2,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \text{ und } 0 \le y \le x\sqrt{3}\,\right\}$$

und berechnen Sie ihr Volumen unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

2. Aufgabe

Sei für $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

(i) Bestimmen Sie das Volumen des durch $f(x,y,z) \le 1$ beschriebenen Ellipsoids E, also $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) \le 1\}$.

(ii) Berechnen Sie auch das Integral

$$\iiint_E \frac{e^{-f(x,y,z)}}{\sqrt{f(x,y,z)}}\, dV.$$

3. Aufgabe

Berechnen Sie die von der Kardioide $\vec{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ t \mapsto (1+\cos t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Fläche unter Verwendung von Polarkoordinaten.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

(i) Bestimmen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten den Flächeninhalt des Kreises

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

(ii) Skizzieren Sie die Menge

$$G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1\big\} \cap K$$

und berechnen Sie

$$\iint_G (x^2 + y^2) \, dxdy \, .$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ und

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\iiint_B f(x,y,z) dxdydz$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Integral

$$\iiint\limits_M \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2 + y^2}} \, dxdydz$$

mit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 \leq 1, \; z \in [1,4]\}$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: 11.07.11–15.07.11 im Tutorium

12. Übung Analysis II für Ingenieure

(Oberflächen- und Flussintegrale)

Dies ist das letzte Blatt, dass für die zweite Semesterhälfte zählt. Es gibt aber noch ein weiteres Übungsblatt mit Tutoriumsaufgaben.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Die Abbildung

$$\vec{v} : [0,2] \times [0,5\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Wendelfläche im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie deren Oberfläche.

2. Aufgabe

a) Parametrisieren Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten den Rand des Kreiszylinders

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : y^2 + z^2 \le 9, -2 \le x \le 4\}$$

und bestimmen Sie den Normalenvektor auf dem Rand von B.

b) Berechnen Sie die folgenden skalaren Oberflächenintegrale:

$$\iint\limits_{\partial B} 1 \; dO, \quad \iint\limits_{\partial B} x(y^2+z^2) \; dO.$$

3. Aufgabe

Die Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ entstehe aus der Bahnkurve von $t \mapsto (t, t^2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$ durch Rotation um die y-Achse. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = (y - x^2, xz^2, y - z^2)^T$ durch S.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) Gegeben sei der Kreiskegel

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq 4 - x,\ 2 \leq x \leq 4\}.$$

Parametrisieren Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten den Rand von B und bestimmen Sie den Normalenvektor auf ∂B.

b) Berechnen Sie die folgenden skalaren Oberflächenintegrale:

$$\iint_{\partial B} 1 \, dO, \quad \iint_{\partial B} (4 - x - y^2 - z^2) \, dO.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Die Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ entstehe aus der Bahnkurve von $t \to (0, t, 1 - \sqrt{t}) \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$, durch Rotation um die z-Achse. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = ((x+y)^2, zy, x^2 + y^2)^T$ durch S.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch das Flächenstück S, das durch die Parametrisierung $\vec{u} : B \to \mathbb{R}^3$, $S = \vec{u}(B)$ gegeben ist, mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -5x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(s,t) = \begin{pmatrix} s^2 \\ -st \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad (s,t) \in B$$

und dem Bereich $B = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq s \leq 2, 0 \leq t \leq s \right\}$.

Gesamtpunktzahl: 20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
www.isis.tu-berlin.de

Abgabe: ——

13. Übung Analysis II für Ingenieure

(Die Integralsätze von Gauß und Stokes)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Flussintegral $\iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$, wobei

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 2z(2-y) \end{pmatrix}$$

und $S = \partial Q$ mit $Q = \left\{(x,y,z)^T \middle| x,y,z \in [0,1]\right\}$.

2. Aufgabe

Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ -1 \leq z - x \leq 2\}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = (zx^3, zy^3, x^2y^3)^T$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Flussintegral

$$\iint\limits_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

3. Aufgabe

Verifizieren Sie die Aussage des Stokesschen Integralsatzes für die Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 4,\ z \leq 0\right\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

Gegeben sei die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ und das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ xy \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes $\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{O}$.

Gesamtpunktzahl: 0