TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 2. Mai 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
1. Übung Analysis II für Ingenieure
(Topologie und Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

---

1. Aufgabe

- Die Menge A ist ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$ mit Randpunkten $(-2,-1)$, $(-2,1)$, $(2,1)$, $(2,-1)$. Der nicht zugehoerige Rand sollte kenntlich gemacht werden. A ist offen und beschränkt.

  $$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (|x| \leq 2,\ y \in \{-1,1\}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (|y| \leq 1,\ x \in \{-2,2\}\}.$$

- B in $\mathbb{R}^3$ ist das um 2 Einheiten in z-Richtung verschobene Rechteck A. B ist weder offen noch abgeschlossen, aber beschränkt.

  $$\partial B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 2, |y| \leq 1,\ z = 2\}.$$

- Die Menge C laesst sich nicht sinnvoll zeichnen, da für alle rationalen q die vertikalen Linien zwischen Punkten $(q,1),(q,-1)$ gezeichnet werden müssten. C ist weder offen noch abgeschlossen; C ist unbeschränkt; $\partial C = \mathbb{R} \times [-1,1]$.

- Bei D handelt es sich um die Fläche strikt oberhalb des Graphen der Funktion $y = x^3$ auf dem x-Achsenabschnitt $]-2,2[$. D ist offen und unbeschränkt; $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^3, |x| \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 2, y \geq 8\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -2, y \geq -8\}$.

- Bei E handelt es sich um den Kreis in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(3,5)$ und Radius 2. E ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; $\partial E = E$.

- F ist ein Kreiszylinder unendlicher Höhe, dessen Grundfläche die aus E gebildete Kreisscheibe ist. F ist abgeschlossen und unbeschränkt; $\partial F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in E\}$.

2. Aufgabe

(a) Definiere $A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < (1+\frac{1}{n})^2\}$. Dann sind die A_n offen, während $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ abgeschlossen ist.

(b) Definiere

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 2\}, \\ B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -2\}. \end{aligned}$$

Beide Mengen sind weder beschränkt noch abgeschlossen. Ihr Durschnitt ist das Quadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

(c) Falsch. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ist offen und unbeschränkt, aber A^c ist ebenfalls unbeschränkt, also nicht kompakt.

3. Aufgabe

(i) **zu** $\vec{a}_k$: Die erste Komponente der Folge $\vec{a}_k$ konvergiert nicht, da

$$\frac{k^2\cos(k\pi)+2k}{k^2+1} = \begin{cases} \frac{k^2+2k}{k^2+1} & \text{falls } k \text{ gerade und} \\ \frac{-k^2+2k}{k^2+1} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit konvergiert $\vec{a}_k$ nicht.

zu $\vec{b}_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{b}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\int_{\frac{1}{k}}^{1} 1\,dt, \int_1^k \frac{1}{t^2+1}\,dt \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}, \arctan(k)\right) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right).$

zu $\vec{c}_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{c}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(e^{\frac{1}{k}}, \ln(\frac{k}{2k+1})\right) = \left(1, \ln(\frac{1}{2})\right) = (1, -\ln(2)).$

(ii) Mit $k_j = 4j$, und $k_l = 2+8l$, $j,l \in \mathbb{N}$, erhalten wir

$$\vec{w}_{4j} = \left(1+(4j)^2e^{-4j}, \tfrac{1}{16j^2}\right) \quad \text{und} \quad \vec{w}_{2+8l} = \left(1+(2+8l)^2e^{-(2+8l)}, 1+\tfrac{1}{(2+8l)^2}\right).$$

Wegen $\lim\limits_{j\to\infty} \vec{w}_{4j} = (1,0)$ und $\lim\limits_{l\to\infty} \vec{w}_{2+8l} = (1,1)$ ist $(\vec{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Die Mengen der Randpunkte von A, B, C und D sind:

$$\begin{aligned}
&\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 y = 16\}, \quad \partial B = B,\\
&\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| + |y| = 4,\ 0 \le z \le 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| + |y| \le 4,\ z \in \{0,2\}\},\\
&\partial D = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \,|\, |x| + |y| \le 3,\ z = 1\}.
\end{aligned}$$

Die Mengen A ist weder offen noch abgeschlossen. Die Menge B ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt und somit auch nicht kompakt. Die Menge C ist offen. Die Menge D ist abgeschlossen und beschränkt, d.h. kompakt.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0\}$.

(b) Falsch. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0\}$ und $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\}$ sind abgeschlossen, aber $A \setminus B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ ist offen.

(c) Korrekt. Sei $\vec{x}$ ein beliebiger Punkt in $A \cap B$. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass die Kugel K_ε mit Radius ε und Mittelpunkt $\vec{x}$ ganz in A enthalten ist. Da B offen ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass die Kugel K_δ mit Radius δ und Mittelpunkt $\vec{x}$ ganz in B enthalten ist. Folglich ist die nichtgrössere (also in der Regel die kleinere) der beiden Kugeln sowohl in A als auch in B enthalten. Also ist $A \cap B$ offen.

3. Aufgabe (6 Punkte)

zu $\vec{a}_k$: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \vec{a}_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} \sin(1/k), \frac{(-1)^k}{k^2} \right) = (0,0)\,.$

zu $\vec{b}_k$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \vec{b}_k &= \lim_{k\to\infty} \left(\left(\int_0^k \tfrac{dt}{t^2+2t+1}, \arctan\left(e^{k^2}\right) \right) \right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{k+1}, \arctan\left(e^{k^2}\right) \right) = \left(1, \tfrac{\pi}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

zu $\vec{c}_k$: Die erste Komponente von $\vec{c}_k$ konvergiert nicht. Somit ist $\vec{c}_k$ nicht konvergent.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11

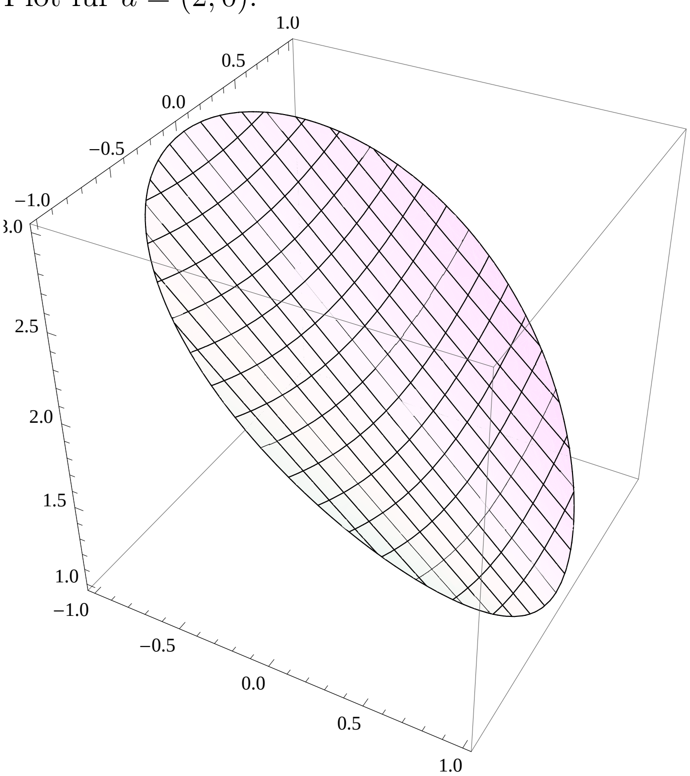
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 3. Mai 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
2. Übung Analysis II für Ingenieure
(Konvergenz im $\mathbb{R}^n$, Abbildungen, Funktionen, Stetigkeit)

---

1. Aufgabe

Wir definieren $f : K \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{a}|$. Die Menge K ist kompakt und f ist stetig, also nimmt f ein Maximum und ein Minimum in K an. Der Einheitskreis ∂K und die Gerade durch den Ursprung, die durch $\vec{a}$ definiert ist, haben zwei Schnittpunkte. Maximum und Minimum werden in diesen beiden Schnittpunkten angenommen.
Die Nivaulinien sind Kreise um $\vec{a}$.
Plot für $\vec{a} = (2, 0)$:



2. Aufgabe

(i) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Um den Punkt $(0,0)$ zu untersuchen, betrachte die Folge $\vec{x}_n := (0, \frac{1}{n})$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1,$$

wohingegen $f(0,0) = 0$. Also ist f in (0,0) nicht stetig.

(ii) g ist für $x \neq 0$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Sei nun (x,y) ein Punkt mit $x = 0$ und $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen (x,y) konvergente Folge. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |g(x_n, y_n) - g(x,y)| \leq \lim_{n\to\infty} |x_n^2 y_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n^4}\right)| = \lim_{n\to\infty} x_n^2 y_n^2 \underbrace{|\sin\left(\frac{1}{x_n^4}\right)|}_{\leq 1} = 0.$$

Also ist g auch in (x,y) stetig und somit auf ganz $\mathbb{R}^2$.

3. Aufgabe

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$ und $\vec{x}_k := (k, 0)$.

(b) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ und $\vec{x}_k := (0, 1 - \frac{1}{k})$.

(i)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x,y) \in A, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii)

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x,y) \in A \cup \partial A, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

(a) D ist abgeschlossen und beschränkt, daher kompakt. f ist stetig, nimmt daher Maximum und Minimum auf D an.
(b) D ist die von der x-Achse und der Parabel $y = 4 - x^2$ eingeschlossene Fläche. Die Niveaumengen sind Geraden mit Normalenvektor $\vec{a}$.
(c) f steigt nach "rechts oben" hin an, dementsprechend liegt das globale Minimum in der "linken unteren" Ecke von D. Dies ist $p = (-2, 0)$. Die zugehörige Höhenlinie schneidet D nur im Punkt p, der also der einzige Punkt ist, in dem das Minimum angenommen wird. Das Minimum ist somit -8.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) M ist beschränkt, da alle Zahlen im Intervall $[0, 1]$ liegen. Ausßerdem gehört jeder Randpunkt von M zu M. Angenommen, M hat einen Randpunkt x, der nicht zu M gehört. Für $x > 1$ folgt $[x - \frac{1}{2}(x-1), x + \frac{1}{2}(x-1)] \cap M = \varnothing$; für $x < 0$ folgt $[\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x] \cap M = \varnothing$. Für $0 < x < 1$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $e^{-(k+1)} < x < e^{-k}$. Also folgt $[e^{-(k+1)} + \frac{1}{2}(x - e^{-(k+1)}), e^{-k} - \frac{1}{2}(e^{-k} - x)] \cap <= \varnothing$. Damit haben wir allen drei möglichen Fällen eine Umgebung von x gefunden, die komplett nicht zu M gehört; also war x kein Randpunkt. Folglich gehören alle Randpunkte von M zu M, d.h. M ist abgeschlossen. Also ist M kompakt.
(b) Falsch. Die Folge $(x_k, y_k) := (-k, k)$ divergiert, aber die Folge $x_k + y_k$ ist die kostante Nullfolge.
(c) Die Aussage ist wahr. Wenn die Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergieren nach Def. auch die Komponentenfolgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Aus der Analysis I wissen wir, dass auch die Summe von zwei konvergenten Folgen, also $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $z_k := x_k + y_k$, konvergiert.

3. Aufgabe (8 Punkte)

(i) In den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist f als Kombination stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0, 0)$ ist f nicht stetig. Dazu betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Sie konvergiert gegen $(0, 0)$, aber $\lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = 1$.

(ii) g ist für $x \neq y$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Sei nun $(x, y) = (0, 0)$ und $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen $(0, 0)$ konvergente Folge. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |g(x_n,y_n) - g(x,y)| \leq \lim_{n\to\infty} |(x_n^2+y_n^2)\arctan\left(\frac{1}{x_n-y_n}\right)|$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)\underbrace{|\arctan\left(\frac{1}{x_n-y_n}\right)|}_{\leq\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Also ist g auch in $(0,0)$ stetig.
In allen anderen Punkten (x,y) mit $x=y$ ist g nicht stetig. Dazu betrachte die Folge $(x_n,y_n) := (x+\frac{1}{n},x)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)\arctan\left(\frac{1}{x_n-y_n}\right)$$
$$= (\lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^2)\lim_{n\to\infty}\arctan(n) = (x^2+y^2)\frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Also ist g in den Punkten (x,x) mit $x\neq 0$ nicht stetig.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 20. Mai 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
3. Übung Analysis II für Ingenieure
(Differentiation)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zu zeigen ist:

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Beweis: $\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right) =$
$\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \left(\begin{pmatrix} y+\Delta y-(x+\Delta x)^2 \\ y+\Delta y \\ x+\Delta x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y-x^2 \\ y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x\Delta x+\Delta y \\ \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} \right)$
$= \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \begin{pmatrix} -\Delta x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$,
da $-\frac{\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \geq -\frac{\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2}} = -|\Delta x| \to 0$ für $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

2. Aufgabe

(a)

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix};$$

für $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$: $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(b) $g'(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}(e^x\sin y\sqrt{x^2+y^2+1}-(x^2+y^2+1)^{-\frac{1}{2}}xe^x\sin y, e^x\cos y\sqrt{x^2+y^2+1}-(x^2+y^2+1)^{-\frac{1}{2}}ye^x\sin y)$

$$\begin{aligned}T_{(x_0,y_0)}(x,y)&=g(x_0,y_0)+g'(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\ \Rightarrow T_{(0,0)}(x,y)&=0+(0,1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\end{aligned}$$

3. Aufgabe

Für $(x,y)\neq(0,0)$ ist g als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar, und daher auch stetig und partiell differenzierbar an diesen Stellen. Die Folgen $(0,\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ konvergieren gegen $(0,0)$. Aber

$$g\left(0,\frac{1}{n}\right)=0\longrightarrow 0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),$$

d.h. g ist in $(0,0)$ unstetig.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}=0=\lim_{t\to 0}\frac{g(0,t)-g(0,0)}{t}=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0).$$

Also ist g in in allen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(x^4+y^2)-xy\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} & \text{falls } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{falls } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

und analog für $\frac{\partial g}{\partial y}$. Die Funktion g kann aber nicht differenzierbar in $(0,0)$ sein da g in $(0,0)$ unstetig ist.

(Die Funktion g kann also insbesondere in $(0,0)$ nicht stetig partiell differenzierbar sein. Letzteres prüfe man zur Übung selber noch einmal von Hand nach. In der Tat ist z.B. die Funktion $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

$\vec{f}'(\vec{x}) = A.$

2. Aufgabe (9 Punkte)

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}}}$$

(a) $\Rightarrow f'(1,0) = (-\sqrt{2}, 0)$

(b) $f'(0,1)\frac{1}{5}(3,4)^T = \frac{1}{5}(0, \frac{-1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}})(3,4)^T = \frac{1}{5}(0, \frac{-1}{\sqrt{3}})(3,4)^T = \frac{-4}{5\sqrt{3}}.$

(c) Die Tangentialebene hat daher die Darstellung:

$$T(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$
$$= 1 - 2(x-1) - (y-1).$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$. Wegen

$$|h(x_n,y_n) - h(0,0)| = \left|\frac{x_n^3 - x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \le \frac{|x_n^3|}{x_n^2 + y_n^2} + \frac{|x_n| y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = |x_n| \longrightarrow 0$$

gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0 = h(0,0)$. Also ist h in $(0,0)$ stetig.

Partielle Differenzierbarkeit:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = 1, \; \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = 0.$$

Im Punkt $(0,0)$ ist h aber nicht differenzierbar, denn ansonsten müsste ja nach Definition der Differenzierbarkeit gelten

$$0 \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{h(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - (h(0,0) + \frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) + \frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial y}(0,0))}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0 - (0 + \frac{1}{n} \cdot 1 + 0)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 27. Mai 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
4. Übung Analysis II für Ingenieure
(Gradient, Rechenregeln)

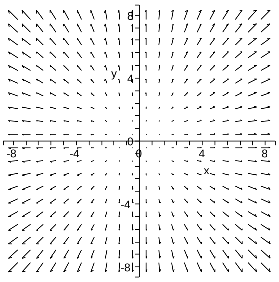
Tutoriumsvorschläge

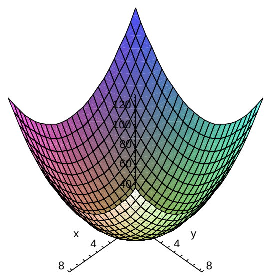
1. Aufgabe

Nur für f_3 ist der Gradient erklärt. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f_3 = \big(2x, 2y\big).$$

Der Gradient zeigt stets in die Richtung des größten Anstiegs von f_3.
Da $|\vec{u}| = 1$ ist, gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \operatorname{grad}_{(1,1)} f_3 \cdot \vec{u} = (2, 2) \cdot (1, 0) = 2$.





2. Aufgabe

Direkt:

(i)

$$\begin{aligned}
&(\vec{f}\cdot\vec{g})(x,y) = x^3 - 2x^2y - 2e^xy + xe^{x+y}\\
\Rightarrow&(\vec{f}\cdot\vec{g})'(x,y) = (3x^2 - 4xy - 2e^xy + e^{x+y} + xe^{x+y}, -2x^2 - 2e^x + xe^{x+y})\\
\Rightarrow&(\vec{f}\cdot\vec{g})'(0,0) = (1,-2).
\end{aligned}$$

Produktregel: $(\vec{f}\cdot\vec{g})' = \vec{f}\cdot\vec{g}' + \vec{f}'\cdot\vec{g}$.

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(0,0) = (0,1,0), \quad \vec{g}(0,0) = (0,0,1)\\
&\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ e^x & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\
&\vec{g}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -2 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
\Rightarrow&(\vec{f}\cdot\vec{g})'(0,0) = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\
&= (0,-2) + (1,0) = (1,-2).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&(\vec{f}\times\vec{g})(x,y) = \begin{pmatrix} e^{2x+y} + 2xy \\ x^3 - (x-2y)e^{x+y} \\ -2xy + 4y^2 - x^2e^x \end{pmatrix}\\
\Rightarrow&(\vec{f}\times\vec{g})'(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x+y} + 2y & e^{2x+y} + 2x \\ 3x^2 - e^{x+y} - (x-2y)e^{x+y} & 2e^{x+y} - (x-2y)e^{x+y} \\ -2y - 2xe^x - x^2e^x & -2x + 8y \end{pmatrix}\\
\Rightarrow&(\vec{f}\times\vec{g})'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Rechenregel: "$(\vec{f}\times\vec{g})'(0,0) = \vec{f}'(0,0)\times\vec{g}(0,0) + \vec{f}(0,0)\times\vec{g}'(0,0)$"

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
&(h\circ \vec{f})(x,y) = h(x-2y, e^x, x) = e^{(x-2y)e^x} + x^2\\
\Rightarrow &(h\circ \vec{f})'(x,y) = (e^x + (x-2y)e^x e^{(x-2y)e^x} + 2x, -2e^x e^{(x-2y)e^x})\\
\Rightarrow &(h\circ \vec{f})'(0,0) = (1,-2).
\end{aligned}
$$

Mit Kettenregel: $h'(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 2z)$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &(h\circ \vec{f})'(0,0) = h'(\vec{f}(0,0))\vec{f}'(0,0)\\
&= h'(0,1,0)\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (1,0,0)\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (1,-2).
\end{aligned}
$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Der Gradient eines skalaren Feldes T weist in einem Punkt $\vec{x}$ die Richtung des stärksten Wachstums von T im Punkt $\vec{x}$.

$$
\begin{aligned}
T(x,y,z) &= 10 + 6\cos(x)\cos(z) - 3\cos(2x)\cos(2z) \\
\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z) &= -6\sin(x)\cos(z) + 6\sin(2x)\cos(2z) \\
\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z) &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z) &= -6\cos(x)\sin(z) + 6\cos(2x)\sin(2z) \\
\Rightarrow \qquad \operatorname{grad} T(x_1,x_2,x_3) &= \begin{pmatrix} -6\sin(x_1)\cos(x_3) + 6\sin(2x_1)\cos(2x_3) \\ 0 \\ -6\cos(x_1)\sin(x_3) + 6\cos(2x_1)\sin(2x_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mit $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$ folgt

$$
\operatorname{grad} T((\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \\ -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix}.
$$

Also ist die Richtung des größten Temperaturanstiegs $(-3\sqrt{3}, 0, -3\sqrt{3})^T$ bzw. skaliert $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ -1)^T$. Der größte Anstieg von $-T$ ist der größte Abfall von T, also ist die Richtung des größten Temperaturabfalls in $\vec{x}$ gerade $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)^T$. Die Temperatur ändert sich nicht in alle Richtungen $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ mit $u_3 = -u_1$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(i)

$$\vec{f}'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & e^v \\ \frac{2u}{1+u^2} & 0 \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'(\vec{g}(1,2)) = \vec{f}'(3,e^2) = \begin{pmatrix} 6 & e^{e^2} \\ \frac{3}{5} & 0 \\ e^{3+e^2} & e^{3+e^2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{g}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}, \quad \vec{g}'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{f} \circ \vec{g})'(1,2) = \vec{f}'(3,e^2) \cdot \vec{g}'(1,2) = \begin{pmatrix} 6 + e^{2+e^2} & 6 + e^{2+e^2} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ (1+e^2)e^{3+e^2} & (1+e^2)e^{3+e^2} \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$g'(x,y,z) = \left((y - z^2)e^{x-z},\ e^{x-z}, (-2z - y + z^2)e^{x-z}\right),$$
$$g'(\vec{f}(t)) = g'(2t, 2t^2, t) = \left(t^2 e^t,\ e^t, (-2t - t^2)e^t\right),$$
$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad (g \circ \vec{f})'(t) = g'(2t, 2t^2, t) \cdot \vec{f}'(t) = (t^2 + 2t)e^t.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

(i)

$$(\vec{g} \times \vec{h})(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2 \sin x \\ y \sin x \\ x^2 \arctan(y^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{g} \times \vec{h})'(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \sin x - x^2 \cos x & 0 \\ y \cos x & \sin x \\ 2x \arctan(y^2) & \frac{2x^2 y}{1+y^4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{g} \times \vec{h})'(\pi,0) = \begin{pmatrix} \pi^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$(\vec{g} \cdot \vec{h})(x,y) = y \arctan(y^2)$$
$$\Rightarrow (\vec{g} \cdot \vec{h})'(x,y) = (0, \arctan(y^2) + \frac{2y^2}{1+y^4})$$
$$\Rightarrow (\vec{g} \cdot \vec{h})'(\pi,0) = (0,0).$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
Stand: 3. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
5. Übung Analysis II für Ingenieure
(Koordinatensysteme, Fehlerschrankensatz)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Die Koordinatenflächen sind:

1. ρ konstant: nach oben und unten unbeschränkter Zylindermantel mit Radius ρ und der z-Achse als Symmetrieachse,
2. φ konstant: Halbebenen senkrecht zur xy-Ebene durch die z-Achse
3. z konstant: Ebenen parallel zur xy-Ebene auf der Höhe z

b)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho}(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) i) Es entsteht ein Achtelkreis mit Radius ρ auf der Höhe z.

ii) Es entsteht ein Achtelzylindermantel um die z-Achse mit Radius ρ und Länge 3.

iii) Es entsteht ein "Tortenstück", d.h. ein ausgefüllter Achtelzylinder mit Radius 2 und Höhe 3.

Wenn ein Parameter variiert wird, so erhält man als Bild eine Kurve. Wenn zwei Parameter variiert werden, so erhält man als Bild eine Fläche. Wenn drei Parameter variiert werden, so erhält man als Bild ein Volumenstück.

d) $x^2 + y^2 = 9, z = 1, \iff \rho = 3, z = 1$. Dies ist ein Kreis in der um 1 nach oben verschobenen xy-Ebene mit dem Radius 3 und dem Mittelpunkt auf der z-Achse, also

$$L = \{(\rho, \varphi, z) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} : \rho = 3, z = 1\}.$$

e) Berechnen wir q zunächst direkt: Es ist $q(\rho, \varphi, z) = (g \circ \vec{f})(\rho, \varphi, z) = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{z}{\rho}$, also

$$\operatorname{grad}_{(\rho,\varphi,z)} q = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\rho^2} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Nun zur etwas umständlicheren Verifikation mit der Kettenregel. Es ist

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{aligned}(g \circ \vec{f})'(\rho, \varphi, z) &= g'(\vec{f}(\rho, \varphi, z)) \cdot \vec{f}'(\rho, \varphi, z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-z\cos\varphi}{\rho^2} & \frac{-z\sin\varphi}{\rho^2} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{z}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{grad}_{(\rho,\varphi,z)} q = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\rho^2} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

Mit $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 e^y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi e^{\sin\varphi}}{\rho} = \rho\cos^2\varphi e^{\rho\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi e^{\rho\sin\varphi} = 0.$$

3. Aufgabe

a) Es gilt: $s = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow g = \frac{2s}{t^2}$. Wenn wir die Werte $s = 44.5m$ und $t = 3sec$ einsetzen erhalten wir folgenden Näherungswert für die Erdbeschleunigung: $g \approx 9.89\frac{m}{sec^2}$.

b) Sei $f(s,t) = \frac{2s}{t^2}$. Dann gilt: $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{2}{t^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{4s}{t^3}$.
Für $s \in [44.4, 44.6]$ und $t \in [2.9, 3.1]$ gilt damit:
$|\frac{\partial f}{\partial s}| \leq \frac{2}{2.9^2} \approx 0.24 =: M_1$ und $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq \frac{4 \cdot 44.6}{2.9^3} \approx 7.31 =: M_2$. Nach dem Fehlerschrankensatz gilt also für $s \in [44.4, 44.6]$ und $t \in [2, 9, 3.1]$ $(s_0 = 44.5,\ \ t_0 = 3)$:
$|f(s_0, t_0) - f(s,t)| \leq M_1|s - s_0| + M_2|t - t_0| \leq 0.24 \cdot 0.1 + 7.31 \cdot 0.1 = 0.755$. Wir können also mit Sicherheit sagen, dass die von uns gesuchte Konstante g im Intervall $[9.89 - 0.755, 9.89 + 0.755] = [9.135, 10.645]$ zu finden ist.
Die tatsächliche Erdbeschleunigung beträgt $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) Die Koordinatenflächen
1. r konstant: Kugeloberfläche mit Radius r.
2. ϑ konstant: Mantelfläche eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkt und Innenwinkel ϑ, nach oben (oder unten) unbeschränkt.
3. φ konstant: Halbebene durch die z -Achse.

b) Die Koordinatenlinien sind Ursprungs(halb)geraden (r variabel), halbe Längenkreise (ϑ variabel) und Breitenkreise (φ variabel).

c) Die Funktionalmatrix der Kugelkoordinaten lautet:

$$\vec{f}'(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) & r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) & r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) & r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

d) Direkt:

$$\Big(g\circ\vec{f}\Big)(r,\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi r\ln(r^2)$$

$$\Longrightarrow (g\circ\vec{f})'(r,\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi(\ln(r^2)+2), \cos\vartheta\cos\varphi r\ln(r^2), -\sin\vartheta\sin\varphi r\ln(r^2)).$$

Mit der Kettenregel:
Zunächst ist

$$g'(x,y,z) = (\ln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2xy}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2xz}{x^2+y^2+z^2}),$$

also

$$\begin{aligned}
(g\circ\vec{f})'((r,\vartheta,\varphi) &= g'(\vec{f}(r,\vartheta,\varphi))\vec{f}'(r,\vartheta,\varphi) \\
&= [(\ln(r^2),0,0) + 2\sin\vartheta\cos\varphi(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)] \\
&\quad\cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\ln(r^2)\cos\varphi\sin\vartheta, r\ln(r^2)\cos\varphi\cos\vartheta, -r\ln(r^2)\sin\varphi\sin\vartheta) \\
&\quad + 2\sin\vartheta\cos\varphi \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta \\ r\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi + r\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi - r\cos\vartheta\sin\vartheta \\ -r\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + r\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}^T \\
&= (\ln(r^2)\cos\varphi\sin\vartheta, r\ln(r^2)\cos\varphi\cos\vartheta, -r\ln(r^2)\sin\varphi\sin\vartheta) \\
&\quad + 2\sin\vartheta\cos\varphi(1,0,0) \\
&= ((\ln(r^2)+2)\cos\varphi\sin\vartheta, r\ln(r^2)\cos\varphi\cos\vartheta, -r\ln(r^2).\sin\varphi\sin\vartheta).
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Wir bezeichnen die Lösungsmengen mit L_a bzw. L_b.
a) Aus $2y = 3x$, $x^2 + y^2 \geq 4$ folgt

$$\begin{aligned} L_a &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: 2\rho\sin\varphi = 3\rho\cos\varphi,\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \geq 4\} \\ &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: \rho \geq 2,\ \sin\varphi = \frac{3}{2}\cos\varphi\} \\ &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: \rho \geq 2,\ \tan\varphi = \frac{3}{2}\}. \end{aligned}$$

b) Aus $x^2 + y^2 \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} L_b &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: \rho \leq \sqrt{3},\ \rho\cos\varphi \geq 0,\ \rho\sin\varphi \geq 0\} \\ &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: \rho \leq \sqrt{3},\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi[,\ \varphi \in [0,\pi]\} \\ &= \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: \rho \leq \sqrt{3},\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]\}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

a) Es gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$. Wenn wir die Werte $L = 2m$ und $T = 2.9s$ einsetzen erhalten wir folgenden Näherungswert für die Erdbeschleunigung: $g \approx 9.38\frac{m}{s^2}$.

b) Sei $f(T,L) = .\frac{4\pi^2 L}{T^2}$ Dann gilt: $\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3}$ und $\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2}$.
Für $T \in [2.7, 3.1]$ und $L \in [1.999, 2.001]$ gilt damit:
$|\frac{\partial f}{\partial T}| \leq \frac{8\pi^2 \cdot 2.001}{2.7^3} \approx 8.03 =: M_1$ und $|\frac{\partial f}{\partial L}| \leq \frac{4\pi^2}{2.7^2} \approx 5.42 =: M_2$. Nach dem Fehlerschrankensatz gilt also für $T \in [2.7, 3.1]$ und $L \in [1.999, 2.001]$ $(T_0 = 2.9,\ \ L_0 = 2)$:
$|f(T_0, L_0) - f(T,L)| \leq M_1|T - T_0| + M_2|L - L_0| \leq 8.03 \cdot 0.2 + 5.42 \cdot 0.001 \approx 1.61$. Wir können also mit Sicherheit sagen, dass die von uns gesuchte Konstante g im Intervall $[9.38 - 1.61, 9.38 + 1.61] = [7.77, 10.99]$ zu finden ist.
Die tatsächliche Erdbeschleunigung beträgt $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 8. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
6. Übung Analysis II für Ingenieure
(Extrema, Satz von Taylor)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung für eine Funktion g mit Differential an einer Stelle $\vec{x}$ lautet:

$$T_g(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = g(\vec{x}) + \operatorname{grad}_{\vec{x}} g \cdot \vec{\Delta x} + \frac{1}{2}\vec{\Delta x}^T H_{\vec{x}} g \vec{\Delta x},$$

wobei $H_{\vec{x}}g$ die Hessematrix an der Stelle $\vec{x}$ ist.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= f(x,y) + \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \ln x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y) \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \\ x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x & \ln^2 x x^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \\ T_f(1+\Delta x, 1+\Delta y) &= f(1,1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= 1 + \Delta x + \Delta x \Delta y \\ &\Rightarrow f(1.1, 1.2) \approx T_f(1.1, 1.2) = 1 + 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 = 1.12 \\ &\text{und} f(0.9, 1.3) \approx T_f(0.9, 1.3) = 1 - 0.1 - 0.1 \cdot 0.3 = 0.87. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

$$\begin{aligned}
&f'(x,y) = (0,0)\\
\Leftrightarrow &(4\alpha x + 2y - 6, 2x + 6y - 8) = (0,0)\\
\Leftrightarrow &(12\alpha x - 2x = 10, 2x + 6y = 8)\\
\Leftrightarrow &\alpha \neq \frac{1}{6},\ x = \frac{10}{12\alpha - 2},\ y = \frac{1}{6}(8 - \frac{20}{12\alpha - 2}).
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:
(i) $\alpha = \frac{1}{6}$: Dann besitzt f keine Extremalstellen.
(ii) $\alpha \neq \frac{1}{6}$: Es existiert genau eine kritische Stelle $(x_\alpha, y_\alpha) := (\frac{10}{12\alpha-2}, \frac{1}{6}(8 - \frac{20}{12\alpha-2}))$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\alpha & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = H_f(x_\alpha, y_\alpha)$$

$$\Rightarrow \det H_f(x_\alpha, y_\alpha) = 24\alpha - 4.$$

(iiA) Für $\alpha > \frac{1}{6}$ ist $\det H_f(x_\alpha, y_\alpha) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. Also liegt in diesem Fall an der Stelle (x_α, y_α) ein Minimum vor.
(iiB) Für $\alpha < \frac{1}{6}$ ist $\det H_f(x_\alpha, y_\alpha) < 0$ und somit liegt an der Stelle (x_α, y_α) ein Sattelpunkt vor.

3. Aufgabe

Kritische Stellen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_{(x,y,z)} f &= \begin{pmatrix} 2(x-y) + 2(x+2y+2) \\ -2(x-y) + 4(x+2y+2) + 2yz^2 \\ 2y^2 z \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 4x + 2y + 4 \\ 2x + 10y + 8 + 2yz^2 \\ 2y^2 z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}.
\end{aligned}$$

Aus $2y^2 z = 0$ folgt $y = 0$ oder $z = 0$. Falls $y = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $x = -1$; die zweite Gleichung ist dann aber nicht mehr lösbar. Falls $z = 0$, erhalten wir $x = y = -\frac{2}{3}$. Also ist

$$(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$$

die einzige kritische Stelle.

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 + 2z^2 & 4yz \\ 0 & 4yz & 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristische Polynom $p_0(t)$ von $H_f(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{aligned} & p_0(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & (t - \frac{8}{9})[(t-4)(t-10) - 4] = 0 \\ \Leftrightarrow & (t - \frac{8}{9})(t^2 - 14t + 36) = 0 \\ \Leftrightarrow & (t - \frac{8}{9})(t - 7 - \sqrt{13})(t - 7 + \sqrt{13}) = 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenwerte von $H_f(x_0, y_0, z_0)$ positiv, also liegt an der Stelle (x_0, y_0, z_0) ein Minimum vor.
Alternativ kann man aufgrund der Blockstruktur von $H_f(x_0, y_0, z_0)$ sofort nachrechnen, dass $H_f(x_0, y_0, z_0)$ positiv definit ist genau dann, wenn die Submatrix

$$\tilde{H} := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Letzteres ist wegen $\det \tilde{H} > 0$ und $\tilde{H}_{xx} > 0$ der Fall. (Also gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\tilde{H} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \text{ und } = 0 \text{ g.d.w. } (x, y) = (0, 0).$$

Also folgt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) H_f(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y)\tilde{H} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{8}{9} z^2 \geq 0$$

und $= 0$ g.d.w. $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.)

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung in diesem Punkt lautet:

$$
\begin{aligned}
T_f(-\frac{2}{3}+\Delta x, -\frac{2}{3}+\Delta y, \Delta z) = f(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0) + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \begin{pmatrix} 4\Delta x + 2\Delta y \\ 2\Delta x + 10\Delta y \\ \frac{8}{9}\Delta z \end{pmatrix} \\
&= 2\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y + 5\Delta y^2 + \frac{4}{9}\Delta z^2 \\
&(= \Delta x^2 + (\Delta x + \Delta y)^2 + 4\Delta y^2 + \frac{4}{9}\Delta z^2
\end{aligned}
$$

An der letzten Umformung sieht man sehr schön, dass die Funktionswerte in der Umgebung von (x_0, y_0, z_0) tatsächlich $> 0 = f(x_0, y_0, z_0)$ sind.)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

$$T_f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{y^2} \\ 2y\sqrt{x}e^{y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}e^{y^2} & \frac{y}{\sqrt{x}}e^{y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x}}e^{y^2} & 2\sqrt{x}e^{y^2} + 4y^2\sqrt{x}e^{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$T_f(1+\Delta x, 0+\Delta y) = f(1,0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{8}\Delta x^2 + \Delta y^2$$
$$\Rightarrow f(1.1, -0.1) \approx T_f(1.1, -0.1) = 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.01 = 1.05875.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

$W(x,t) = cx^2(50-x^2)te^{-\frac{1}{3}t}$.
Berechnung der Kritischen Punkte

$$\operatorname{grad} W(x,t) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 4cx(25-x^2)te^{-\frac{1}{3}t} \\ cx^2(50-x^2)e^{-\frac{1}{3}t}(1-\frac{1}{3}t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix} .$$

Aus II folgt dann $t = 0$, $x = 0$ oder $x = \pm 5$. Laut Aufgabenstellung ist nur $x = 5$ sinnvoll. Aus II folgt mit $x = 5$, dass $t = 3$. Damit lautet der (interessante) kritische Punkt $P = (5,3)$. Es folgt

$$H_W(x,t) = ce^{-t} \begin{pmatrix} (100c - 12cx^2)te^{-\frac{1}{3}t} & (100cx - 4cx^3)e^{-\frac{1}{3}t}(1-\frac{1}{3}t) \\ (100cx - 4cx^3)e^{-\frac{1}{3}t}(1-\frac{1}{3}t) & cx^2(50-x^2)[-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}(1-\frac{1}{3}t) - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}] \end{pmatrix}.$$

Wegen $det(H_w(P)) > 0$ und $W_{xx}(P) < 0$ ist P ein (lokales) Maximum.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Das Notwendige Kriterium für die Existenz von Extremstellen lautet: $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \vec{0}$, d.h.

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2 \\ 2x + y^2 + y \\ 4z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Als kritische Punkte ergeben sich damit

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das hinreichende Kriterium berechnen wir die Hessematrix

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2y + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und damit ergibt sich

$$H_f(\vec{w}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$H_f(\vec{w}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_i von $H_f(\vec{w}_i)$ sind die Eigenwerte zu $H_f(\vec{w}_i)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & p_1(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & (4 - t)[(2 - t)(-1 - t) - 4] = 0 \\ \Leftrightarrow & (4 - t)(t^2 - t - 6) = 0 \\ \Leftrightarrow & (4 - t)(t - 3)(t + 2) = 0. \end{aligned}$$

Also hat $H_f(\vec{w}_1)$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte; $\vec{w}_1$ ist also ein Sattelpunkt.

Im Fall $H_f(\vec{w}_2)$ wälen wir eine Strategie, die wir auch schon für $H_f(\vec{w}_1)$ hätten anwenden können. Aufgrund der Blockstruktur ist $H_f(\vec{w}_2)$ positiv definit genau dann wenn die Submatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Letzteres ist der Fall, wegen

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} > 0 \text{ und } H_{xx} = 2 > 0.$$

Also liegt an der Stelle $\vec{w}_2$ ein Minimum vor.
Taylorpolynome:

$$\begin{aligned}
T_f(\Delta x, -1 + \Delta y, \Delta z) &= f(0, -1, 0) + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \begin{pmatrix} 2\Delta x + 2\Delta y \\ 2\Delta x - \Delta y \\ 4\Delta z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} + \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y - \frac{1}{2}\Delta y^2 + 2\Delta z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_f(-3 + \Delta x, 2 + \Delta y, \Delta z) &= f(-3, 2, 0) + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&= 9 - 12 - 6 + \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \begin{pmatrix} 2\Delta x + 2\Delta y \\ 2\Delta x + 5\Delta y \\ 4\Delta z \end{pmatrix} \\
&= -\frac{13}{3} + \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y + \frac{5}{2}\Delta y^2 + 2\Delta z^2
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 17. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur 7. Übung Analysis II für Ingenieure

(Extrema mit Nebenbedingungen, Klassische Differentialoperatoren)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Der Gradient von f ist

$$\operatorname{grad} f = (2x - 3y, -3x + 6y)^T.$$

Weiter ist $\operatorname{grad} f = \vec{0}$ g.d.w. $(x, y) = (0, 0) =: (x_0, y_0)$.
Hessematrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = H_f(0, 0), \quad \det H_f(0, 0) = 3 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

Also liegt an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum vor.

(i) Das Innere von D ist $\overset{\circ}{D} = (0, 1) \times (0, 2)$. Wie eben berechnet liegen dort keine Extrema vor. Der Rand ∂D von D besteht aus vier Segmenten:

(a) $y = 0, 0 \leq x \leq 1 : f(x, 0) = x^2$.
Minimum: $f(0, 0) = 0$; Maximum $f(1, 0) = 1$.

(b) $y = 2, 0 \leq x \leq 1 : g(x) := f(x, 2) = x^2 - 6x + 12$.
Kritischer Punkt von g: $x = 3$. Aber $(3, 2) \notin \partial S$. Bleiben als einzige Kandidaten für ein Extremum:

$$f(0, 2) = 12, \quad f(1, 2) = 7.$$

(c) $x = 0, 0 \leq y \leq 2 : f(0, y) = 3y^2$.
Diese Funktion hat im Innern ($y \in (0, 2)$) keine kritischen Punkte. Die Randpunkte sind bereits ausgewertet.

(d) $x = 1, 0 \leq y \leq 2 : h(y) := f(1, y) = 1 + 3y^2 - 3y$.
Kritischer Punkt von h: $y = \frac{1}{2}$. Also ergibt sich als weiterer Kandidat für ein Extremum:

$$f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Die Randpunkte von h sind bereits ausgewertet.

Das globale Maximum auf ∂D liegt also bei $(0, 2)$ und das globale Minimum auf ∂D bei $(0, 0)$.

(ii) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ liegt im Innern von D und ist damit ein lokales Minimum. Um die Extrempunkte auf dem Rand der Kreisscheibe zu bestimmen schreiben wir die Nebenbedingung in der Form

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\text{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 6y \end{pmatrix} = \lambda \text{grad}_{(x,y)} g = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \end{pmatrix}, \qquad g(x, y) = 0.$$

Aus der 1. Zeile der 1. Gleichung erhalten wir $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\lambda x = \frac{2}{3}x(1 - \lambda)$; in die 2. Zeile eingesetzt liefert

$$-3x + 4x(1 - \lambda) - 2\lambda \frac{2}{3} x(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow x(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{3}{4}) = 0.$$

Die Lösung $x = 0$ liefert in die 1. Zeile eingesetzt $y = 0$ und der Punkt $(0, 0)$ erfüllt die Randbedingung nicht. Wir untersuchen im folgenden die Fälle $\lambda_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$. Dann ist $y_{1,2} = -\frac{2}{3}(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13})x$. Mit $x = 1$ ist $y_{1,2} = -\frac{2}{3}(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13})$ und daher erfüllen die Punkte $(1, -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13})$ und $(1, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13})$ und alle skalaren Vielfachen die Gleichung

$$\text{grad}_{(x,y)} f = \lambda \text{grad}_{(x,y)} g$$

Um die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ zu erfüllen normieren wir die Punkte und erhalten

$$P_{1,2} = \pm 0.2226499 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_{3,4} = \pm 0.7773501 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

als Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand der Kreisscheibe. Aus

$$f(P_{1,2}) \approx 1.04 \qquad \text{und} \qquad f(P_{3,4}) \approx 0.15$$

und der Kompaktheit des Definitionsbereichs von f folgt, dass in den Punkten $P_{1,2}$ globale Maxima angenommen werden. Am Punkt $(0, 0)$ liegt das globale Minimum.

2. Aufgabe

Minimiere $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 - 4y = 0$.

(a) Mit Hilfe der Nebenbedingung erhält man $y = \frac{1}{4}x^2$. Eingesetzt in f ergibt das den Ausdruck $x^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 1)^2 = (\frac{1}{4}x^2 + 1)^2$, der bei $x = 0$ minimal wird. Damit ergibt sich $(x,y) = (0,0)$ als Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

(b) Man erhält $x^2 = 4y$, und kann daher $4y + (y-1)^2 = (y+1)^2$ ohne Nebenbedingungen minimieren. Das Minimum liegt offensichtlich bei $y = -1$. Dazu existiert aber kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$. Mit $y = -1$ ergibt sich also keine Lösung des Optimierungsproblems.

(c) Mit dem Lagrange-Ansatz ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ergibt sich als einziger kritischer Punkt der Punkt $(x,y) = (0,0)$ aus (a), in diesem wird das Minimum angenommen.

Der in (a) und (c) gefundene kritische Punkt ist wirklich die gesuchte Minimalstelle, wie man zum Beispiel am Verlauf der Höhenlinien von f erkennen kann.

3. Aufgabe

Wir benutzen die aus dem Skript bekannten Rechenregeln. (Direkt geht es wohl schneller!)

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(fg) &= g \,\mathrm{grad}\, f + f \,\mathrm{grad}\, g = \ldots = e^{xy} \begin{pmatrix} xy + y^3 + yz^3 + 1 \\ x^2 + xy^2 + xz^3 + 2y \\ 3z^2 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{div}(f\vec{v}) &= f \mathrm{div}\vec{v} + \mathrm{grad} f \cdot \vec{v} = e^{xy}(2x + 2y + 2z + yx^2 - y^3 + xy^2 - xz^2), \\
\mathrm{rot}(f\vec{v}) &= f \mathrm{rot}\vec{v} + \mathrm{grad} f \times \vec{v} = e^{xy} \left(\begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= e^{xy} \begin{pmatrix} 2z + xz^2 - x^3 \\ 2x - yz^2 + yx^2 \\ 2y + y^3 - z^2 y - x^3 + xy^2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) Wir betrachten

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 4x - 4y \\ -4x + 4y \end{pmatrix} = 0$$

Somit ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x = y\}$ die Menge aller kritischen Punkte.
Es gilt

$$H_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Da aber für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $det(H_{(x,y)} f) = 0$, kommen wir so nicht weiter. Es ist aber $f(x,y) = 2(x-y)^2$, d.h. es gilt immer $f(x,y) \geq 0$ und $f(x,y) = 0$ g.d.w. $x = y$. In all diesen Punkten wird das globale Minimum angenommen.

(i) Das Innere von D ist $\mathring{D} = (0,1) \times (-1,2)$. Wie eben berechnet liegen dort Minimalstellen vor. Der Rand ∂D von D besteht aus vier Segmenten:

(a) $y = -1, 0 \leq x \leq 1 : g_1(x) := f(x,-1) = 2x^2 + 4x + 2$.
Kritische Punkte: $g_1'(x) = 0$ g.d.w. $x = -1 \notin [0,1]$. Damit ergeben sich als Kandidaten für globale Extrema: $f(0,-1) = 2$, $f(1,-1) = 8$.

(b) $y = 2, 0 \leq x \leq 1 : g_2(x) := f(x,2) = 2x^2 - 8x + 8$.
Kritische Punkte: $g_2'(x) = 0$ g.d.w. $x = 2 \notin [0,1]$. Damit ergeben sich als Kandidaten für globale Extrema: $f(0,2) = 8$, $f(1,2) = 2$.

(c) $x = 0, -1 \leq y \leq 2 : f(0,y) = 2y^2$.
Es ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

(d) $x = 1, -1 \leq y \leq 2 : g_3(y) := f(1,y) = 2 - 4y + 2y^2$.
Kritische Punkte: $g_3'(y) = 0$ g.d.w. $y = 1$. Es ergibt sich aber kein weiterer Kandidat.

Das globale Maximum wird auf ∂D also in $(1,-1)$ und $(0,2)$ angenommen.

(ii) Nun betrachten wir die Nebenbedingung $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

Es ist $\operatorname{grad}_{(x,y)} g = (4x, 4y) = 0$ nur für $(0,0)$. Aber da $g(0,0) = -1$ ist, gibt es somit keine singulären Punkten.

Nun lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - 4y &= 4\lambda x \\ -4x + 4y &= 4\lambda y \\ 2x^2 + 2y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Falls $\lambda = 0$ ist, bekommen wir $x = y$, was wie bereits gezeigt wurde Minimalstellen sind

Falls $\lambda \neq 0$ ist, erhalten wir durch die erste und zweite Gleichung $x = -y$. Eingesetzt in die letzte Gleichung erhalten wir $4x^2 - 1 = 0$. Also sind $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ weitere mögliche Extremwerte.

Es ist

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= 2 \\ f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= 2 \end{aligned}$$

Da D abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt f seine Extremwerte an. Somit sind $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Stellen an denen das globale Maximum angenommen wird.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Ein Kreiszylinder mit Grundfläche vom Radius r und Höhe z hat das Volumen $V(r,h) = r^2\pi z$. Der Flächeninhalt der Grundfläche ist $g = r^2\pi$, der der Mantefläche $h = 2r\pi z$. Wir formulieren also die Extremwertaufgabe:

$$\text{Minimiere } c_1 g + c_2 h$$

unter der Nebenbedingung

$$g = \pi r^2, \quad h = 2\pi r z, \quad \pi r^2 z = V_0.$$

Die Variablen g und h lassen sich natürlich eliminieren, so dass wir das vereinfachte Problem

$$\text{Minimiere } c_1 \pi r^2 + 2c_2 \pi r z$$

unter der Nebenbedingung

$$\pi r^2 z = V_0$$

erhalten. Im Fall $V_0 = 0$ sind die Produktionskosten natürlich 0. Also dürfen wir $V_0 > 0$ annehmen, was $r > 0$ und $z > 0$ impliziert. Aus der Nebenbedingung folgt $z = \frac{V_0}{\pi r^2}$. Die Aufgabe lautet also: Minimiere die Funktion

$$f(r) = c_1 \pi r^2 + 2c_2 \pi r \frac{V_0}{\pi r^2} = c_1 \pi r^2 + \frac{2c_2 V_0}{r}.$$

Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte:

$$f'(r) = 2c_1 \pi r - \frac{2c_2 V_0}{r^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow c_1 \pi r^3 = c_2 V_0.$$

Daraus ergibt sich die Lösung $r_0 = (\frac{c_2 V_0}{c_1 \pi})^{\frac{1}{3}}$. Weiter gilt $f''(r) = 2c_1\pi + \frac{4c_2V_0}{r^3}$, also $f''(r_0) > 0$. Daher ist r_0 tatsächlich eine Minimalstelle.
Als optimale Parameter ergeben sich also $g_0 = \pi(\frac{c_2V_0}{c_1\pi})^{\frac{2}{3}} = \pi^{\frac{1}{3}}(\frac{c_2V_0}{c_1})^{\frac{2}{3}}$,
$h_0 = 2\pi(\frac{c_2V_0}{c_1\pi})^{\frac{1}{3}}\frac{V_0}{\pi(\frac{c_2V_0}{c_1\pi})^{\frac{2}{3}}} = 2V_0^{\frac{2}{3}}(\frac{c_1\pi}{c_2})^{\frac{1}{3}}$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy\sin z, \\ g(x,y,z) &= \sqrt{1+z^2} + x\cos y, \\ \vec{v}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x+y^2 \\ \sin z \\ x^2+y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \begin{pmatrix} y\sin z \\ x\sin z \\ xy\cos z \end{pmatrix}, \\ \text{grad } g &= \begin{pmatrix} \cos y \\ -x\sin y \\ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{pmatrix}, \\ \text{div } \vec{v} &= 1, \\ \text{rot } \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1-\cos z \\ -2x \\ -2y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{div}(f\vec{v}) = (\text{grad } f)\cdot\vec{v} + f\text{div } \vec{v} = 2xy\sin z + y^3\sin z + x\sin^2 z + x^3y\cos z + xy^2\cos z,$$

$$\text{rot}(f\vec{v}) = (\text{grad } f)\times\vec{v} + f \text{ rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} x^3\sin z + 2xy\sin z - 2xy\cos z\sin z \\ x^2y\cos z + xy^3\cos z - 3x^2y\sin z - y^2\sin z \\ y\sin^2 z - x^2\sin z - 3xy^2\sin z \end{pmatrix}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11

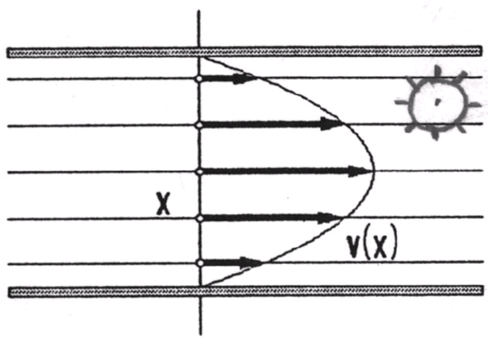
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 17. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
8. Übung Analysis II für Ingenieure
(Mehrfachanwendungen der Diff.operatoren, Potentiale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a)



Das eingezeichnete Rad würde sich z.B. im mathematisch positivem Sinn drehen und die Achse würde in Richtung $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ stehen (vgl. Skript).

Formelmässig ergibt sich

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - (x^2 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 - (-2z) \\ 0 - 0 \\ 0 - (-2x) \end{pmatrix} = 2c \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

b) Die Volumenverzerrung wird durch die Divergenz des Strömungsfeldes beschrieben. Diese berechnet sich gemäss

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - (x^2 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

c) Analog wie in b) müssen wir nun $\operatorname{div} \tilde{\vec{v}}$ mit $\tilde{\vec{v}} = f\vec{v}$ und $f(x, y, z) = e^{-y}$ berechnen, d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\vec{v}} &= \nabla \cdot \tilde{\vec{v}} = \nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-y} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - (x^2 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} + f \cdot 0 \\ &= ce^{-y}(r^2 - (x^2 + z^2)) \end{aligned}$$

d) Es gilt:

$$\begin{aligned} \eta &= -\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = -\nabla\rho \cdot \vec{v} - \rho \operatorname{div} \vec{v} \\ &= -\begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix} \cdot c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - (x^2 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} - f \cdot 0 \\ &= 2c(1 - y)(r^2 - (x^2 + z^2)). \end{aligned}$$

Damit verschwindet die instantante Dichteveränderung in den Punkten auf dem Rand der Röhre $\{x^2 + z^2 = 1\}$ sowie in der Querschnittsebene $\{y = 1\}$.

2. Aufgabe

a) Es ist $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ für jedes Vektorfeld $\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit stetigen 2.ten partiellen Ableitungen (s. Aufgabe 1 b) der Tutoriumsvorschläge).

b) Nicht definiert, da $\operatorname{rot} \vec{w}$ ein Vektorfeld ist.

c) $\Delta u = 0$; folglich ist $\operatorname{grad} \Delta u$ der Nullvektor.

3. Aufgabe

Aus $f(\vec{x}, t) = t^{-\frac{3}{2}} exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{3}{2} t^{-\frac{5}{2}} exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}) + t^{-\frac{3}{2}} |\vec{x}|^2 \frac{1}{4t^2} exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}) \\ &= \frac{1}{4} t^{-\frac{7}{2}} exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}) [|\vec{x}|^2 - 6t] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}}x_i exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})\right)\\ &= -\frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}}exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}) + \frac{1}{4}t^{-\frac{7}{2}}x_i^2 exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})\\ &= \frac{1}{4}t^{-\frac{7}{2}}exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})(x_i^2 - 2t)\end{aligned}$$

Also folgt

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{4}t^{-\frac{7}{2}}exp(-\frac{|\vec{x}|^2}{4t})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6t) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

4. Aufgabe

(i) Da $\mathbb{R}^3$ offen und konvex ist, sind die notwendigen Kriterien bereits hinreichende Kriterien (Satz 89 und Satz 92). Da $\vec{v}$ wirbelfrei ist, also

$$\operatorname*{rot}_{(x,y,z)} \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(3x^2-3z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-6xy)}{\partial z} \\ \frac{\partial(3x^2-3y^2+6xz)}{\partial z} - \frac{\partial(3x^2-3z^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-6xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2-3y^2+6xz)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

besitzt $\vec{v}$ ein (globales) Potential. Da $\vec{v}$ quellenfrei ist, also

$$\operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v} = \frac{\partial(3x^2-3y^2+6xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-6xy)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2-3z^2)}{\partial z} = 0,$$

besitzt $\vec{v}$ ein (globales) Vektorpotential.

(ii) Gesucht ist eine differenzierbare Funktion u mit $\operatorname{grad} u = -\vec{v}$. Integration der ersten Koordinate liefert $u(x,y,z) = -x^3 + 3y^2x - 3x^2z + h(y,z)$ mit einer differenzierbaren Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Die zweite Koordinate zeigt, dass h nicht von y abhängt, mit der dritten bekommt man $h(y,z) = z^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$ konstant. Also ist jedes Potential gegeben durch

$$u(x,y,z) = -3x^2z + z^3 + 3xy^2 - x^3 + C.$$

Man berechnet direkt $\Delta u(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)(x,y,z) = -6z - 6x + 6x + 6z = 0$ oder $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = -\operatorname{div}\vec{v} = 0$, also ist u harmonisch.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Wir bezeichnen die Ableitung von f mit f'. Aus der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\Delta F &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_i f'(<\vec{k},\vec{x}> -\omega t)\Big) - \frac{\partial F}{\partial t}\Big(\omega f'(<\vec{k},\vec{x}> -\omega t)\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 f''(<\vec{k},\vec{x}> -\omega t) + \omega^2 f''(<\vec{k},\vec{x}> -\omega t)\\ &= 2\omega^2 f''(<\vec{k},\vec{x}> -\omega t)\end{aligned}$$

Also erfüllt F die Gleichung.

a)

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2}\right)\\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-x_i(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{3}(-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x_i^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{5}{2}})\\ &= -3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{5}{2}}) = 0.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= cC_1 f'(x - ct) - cC_2 g'(x + ct)\\ &= c^2(C_1 f''(x - ct) + C_2 g''(x + ct)\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 f'(x - ct) + C_2 g'(x + ct)\right)\\ &= c^2(C_1 f''(x - ct) + C_2 g''(x + ct)).\end{aligned}$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

b) Es ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \vec{0}$ für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit stetigen 2.ten partiellen Ableitungen (s. Aufgabe 1 a) der Tutoriumsvorschläge).

b) Nicht definiert, da $\operatorname{div}(\vec{w} - u\vec{v})$ ein Skalarfeld ist.

c) $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\ \vec{v})(x,y,z) = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v})(x,y,z) = \operatorname{grad}(0) - (2,0,0)^T = (-2,0,0)^T$.

3. Aufgabe

(6 Punkte)

(i) Da $\mathbb{R}^3$ konvex und offen ist, ist hinreichend für die Existenz eines Potentials für $\vec{v}$, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} \underset{(x,y,z)}{\operatorname{rot}}\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} -x\sin(xy) - (-x\sin(xy)) \\ -y\sin(xy) - (-y\sin(xy)) \\ (-z\sin(xy)) + (-xyz\cos(xy)) - (-z\sin(xy)) - (-xyz\cos(xy)) \end{pmatrix} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

hat $\vec{v}$ ein (globales) Potential.

(ii) Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} u = -\vec{v}$.

Aus $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = yz\sin(xy)$ folgt $u(x,y,z) = -z\cos(xy) + \phi(y,z)$ mit einem differenzierbaren ϕ. Nun soll $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = xz\sin(xy) - y$ gelten. Aus

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = xz\sin(xy) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z) = xz\sin(xy) - y$$

folgt, dass $\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z) = -y$ ist, also $\phi(y,z) = -\frac{1}{2}y^2 + \psi(z)$, ψ differenzierbar. Damit haben wir bisher $u(x,y,z) = -z\cos(xy) - \frac{1}{2}y^2 + \psi(z)$.

Des Weiteren soll $\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -\cos(xy) - z^5$ gelten, also

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -\cos(xy) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z) = -\cos(xy) - z^5\ .$$

Somit ist $\frac{\partial \psi}{\partial z}(z) = -z^5$, also ist $\psi(z) = -\frac{1}{6}z^6 + c$ für ein beliebig wählbares $c \in \mathbb{R}$.

Somit haben alle Potentiale von $\vec{v}$ die Form $-z\cos(xy) - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}z^6 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
Stand: 26. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur 9. Übung Analysis II für Ingenieure

(Andere Koordinaten, Parametrisierungen, Kurvenintegrale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Direkt:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(-xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(-xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\
&= -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
&- x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3xy^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
&- x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3xz^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
&= -5x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
&= -2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit Kugelkoordinaten: Es gilt:

$$u(r,\phi,\theta) = \cos\phi\sin\theta,$$

also

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta})}{\partial \theta} \\
&= 0 + 0 - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos\phi\sin\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\cos\phi\cos\theta)}{\partial\theta} \\
&= \frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} - 1\right) \\
&= \frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= -\frac{2}{r^2}\cos\phi\sin\theta \\
&(= -2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.)
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe

a) Kreis in der $uy-$Ebene um den Ursprung: $u = r\ \cos t,\ \ y = r\sin t$
u Winkelhalbierende zwischen $x-$Achse und $z-$Achse: $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{u}{\sqrt{2}}$

folglich $\vec{c}(t) = (4 + \frac{3}{\sqrt{2}}\ \cos t,\ \ 4 + 3\sin t,\ \ 4 + \frac{3}{\sqrt{2}}\ \cos t),\quad t \in [0, 2\pi]$

b)

$$
\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin t\cos(\arctan(2)) \\ 4\sin t\sin(\arctan(2)) \\ 4\cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi]
$$

3. Aufgabe

i) $\vec{v}$ hat kein Potential.

$$
\int_{\vec{x}} \vec{v}\,\vec{ds} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t + e^t \\ e^t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix} dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 6t + 3e^t + te^t\,dt = 3 + 3(e-1) + [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt \\
&= 3 + 3(e-1) + e - (e-1) = 3e + 1
\end{aligned}
$$

ii) Potential: $\Phi(x,y,z) = -e^y \sin x - 3yz^2$. Da die Kurve geschlossen ist, folgt

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\, \vec{ds} = 0.$$

4. Aufgabe

Hier ist

$$\dot{\vec{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - 2\sin t\cos t \\ \cos t - \sin^2 t + \cos^2 t \end{pmatrix}$$

und

$$|\dot{\vec{c}}(t)| = \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t(\sin^2 t + \cos^2 t) + (\sin^2 t + \cos^2 t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos t}.$$

Mit $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ folgt für die Bogenlänge der Kardioide

$$\begin{aligned} L &= \int_{\vec{c}} 1\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1+\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} |\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)|\, dt = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt \\ &= 8\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt $f(\vec{c}(t)) = 1 + \cos t$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}} f\, ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{c}(t))|\dot{\vec{c}}(t)|\, dt = 2\int_0^{2\pi} (1+\cos t)|\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)|\, dt = 4\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right)|\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)|\, dt \\ &= 8\int_0^{\pi} \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\, \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt = 8\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt - 8\int_0^{\pi} \sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt \\ &= 16\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{16}{3}\sin^3\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es ist

$$u(\rho, \phi, z) = z\rho \cos\phi \sin\phi,$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&= 0 + \frac{z}{\rho}\cos\phi\sin\phi + \frac{z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) + 0 \\
&= +\frac{z}{\rho}\cos\phi\sin\phi + \frac{z}{\rho}(-2\cos\phi\sin\phi - 2\cos\phi\sin\phi) \\
&= -3\frac{z}{\rho}\cos\phi\sin\phi
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Die Schnittlinie von S^2 mit $\mathcal{P}$ ist ein zur xy-Ebene paralleler Kreis mit Mittelpunkt auf der z-Achse. Ein Punkt $(x, y, z)^\top \in S^2$ muss $2z^2 = 1$ erfüllen, damit er zu $\mathcal{P}$ gehört. Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist daher $(0, 0, z_0)^\top$, $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und der Radius ist ebenfalls z_0. Also wählen wir

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} z_0 \cos(2\pi t) \\ z_0 \sin(2\pi t) \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1].$$

(b) Hier ist

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1],$$

eine mögliche Parametrisierung.

(c) Für

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16 \right\}$$

erhalten wir die Parametrisierung

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\sin(2\pi t) \\ 3 + 4\cos(2\pi t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1].$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

i) Potential: $\Phi(x,y) = -xy + \frac{y^2}{2}$

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\, \vec{ds} = \Phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

ii) $\vec{v}$ hat kein Potential.

$$\int_{\vec{x}} \vec{v}\, \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos t + \sin t\\ -\cos t\\ 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Es ist $\dot{c}(t) = -e^{-t}\big((\cos(t), \sin(t))^T - (-\sin(t), \cos(t))^T\big)$, und somit $|\dot{c}^2(t)| = 2 \cdot e^{-2t}$, d.h. $|\dot{c}(t)| = \sqrt{2}e^{-t}$. Folglich ergibt sich als Länge der Spirale

$$L(c) = \int_0^{\infty} |\dot{c}|(t)dt = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-t}dt = \sqrt{2}.$$

b) Mit $F(c(t)) = e^{-2t}$ ist

$$\int_c F(s)|ds| = \int_0^{\infty} F(c(t))|\dot{c}|(t)dt = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-2t}\cdot e^{-t}dt = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11

Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan
Stand: 4. Juli 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
10. Übung Analysis II für Ingenieure
(Mehrdimensionale Integration)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Es ist

a)
$$\int_3^4 \int_1^2 (y+1)x^y \, dx \, dy = \int_3^4 \left[x^{y+1}\right]_1^2 dy = \int_3^4 \left(2^{y+1}-1\right) dy = \int_3^4 \left(e^{(y+1)\ln 2}-1\right) dy$$
$$= \left[\frac{2^{y+1}}{\ln 2} - y\right]_3^4 = \frac{16}{\ln 2} - 1.$$

b)
$$\int_0^2 \int_0^1 (2-xy)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[2x - \tfrac{1}{2}x^2 y\right]_0^1 dy = \left[2y - \tfrac{1}{4}y^2\right]_0^2 = 3$$

c)
$$\int_0^1 \int_0^2 (2-xy)\, dy\, dx = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} (2-xy)\, dy dx = \int_0^2 \int_0^1 (2-xy)\, dx\, dy = 3,$$

wobei die letzte Gleichheit aus Teil b) folgt.

d)
$$\int_1^2 \int_2^3 \int_{1/y}^y e^{2x-y}\left(z^3 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{27}{4}z - \frac{27}{8}\right) \cos y \, dx\, dy\, dz$$
$$= \int_2^3 \int_{1/y}^y \int_1^2 e^{2x-y}(z-3/2)^3 \cos y \, dz\, dx\, dy$$
$$= \int_2^3 \int_{1/y}^y 0 \, dx\, dy = 0,$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus der Symmetrie des z-Integranden um $3/2$ folgt.

2. Aufgabe

Die beschriebene Menge Q lässt sich als Punktmenge in $\mathbb{R}^3$ unterhalb eines Funktionsgraphen $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in F \subset \mathbb{R}^2$ für einen Bereich F darstellen. F ist die Projektion von Q auf die (x, y)-Ebene d.h.

$$F = Q \cap \{z = 0\} = \{(x, y) |\, x \geq 0, y \geq 0, 3x + 4y \leq 12\}.$$

Mit der Funktion $f(x, y) = \frac{12-3x-4y}{2}$ ist

$$Q = \{x, y, z \geq 0 \,|\, 0 \leq z \leq f(x, y),\ (x, y) \in F\} \subset \mathbb{R}^3$$

und folglich gilt

$$V(Q) = \iint_F f(x, y) dy dx$$

F als Bereich in Standardform dargestelllt ist

$$F = \{(x, y) \,|\, x \in [0, 4], y \in [0, \frac{12 - 3x}{4}]\}$$

und wir können integrieren

$$\begin{aligned}
V(Q) = \iint_F f(x, y) dy dx &= \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}x} \frac{12 - 3x - 4y}{2} dy dx \\
&= \int_0^4 \left[(6 - \frac{3}{2}x)y - y^2\right] \Big|_0^{(3-\frac{3}{4}x)} dx = \int_0^4 \left[(6 - \frac{3}{2}x)(3 - \frac{3}{4}x) - (3 - \frac{3}{4}x)^2\right] dx \\
&= \int_0^4 \left[9 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2\right] dx = 9 \int_0^4 (1 - \frac{1}{4}x)^2 dx = -9\frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4}x)^3 \Big|_0^4 = 12
\end{aligned}$$

Die Menge Q ist ein Tetraeder mit Grundfläche F und Höhe $h = 6$ (im Punkte $(x, y, z) = (0, 0, 6)$). Das Dreieck F ist rechtwinklig mit den Seitenlängen 4 und 3 folglich berechnet sich mit der Pyramidenformel $V(Q) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4) \cdot 6 = 12$.

3. Aufgabe

Sei (x_S, y_S) der Schwerpunkt des Dreiecks D. Dann gilt

$$x_S = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D 1 dx dy} \quad \text{und}$$

$$y_S = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D 1 dx dy}.$$

Es ist

$$\iint\limits_D 1 dx dy = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} 1 dy dx = 6$$

und

$$\iint\limits_D x dx dy = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} x dy dx = \int_0^4 \frac{3}{4} x^2 dx = 16,$$

$$\iint\limits_D x dx dy = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} y dy dx = \int_0^4 \frac{9}{32} x^2 dx = 6,$$

also $(x_S, y_S) = (\frac{8}{3}, 1)$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

(i)

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_3^4 yx^{y-1}dydx &= \int_3^4\int_1^2 yx^{y-1}dxdy\\ &= \int_3^4 x^y\Big|_{x=1}^{x=2}dy\\ &= \int_3^4 2^y - 1dy\\ &= \frac{8}{\ln 2} - 1\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_\pi^{3\pi}\int_0^3 x^2\sin ydxdy &= \int_\pi^{3\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\sin ydy\\ &= 9\int_\pi^{3\pi}\sin ydy\\ &= 0\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_x^{1+x^2} xydydx &= \int_0^1 \frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=x}^{y=1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x + x^3 + x^5dx = \frac{11}{24}\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^{e^x}\int_{\frac{x}{y}}^{\frac{1}{y}} e^{yz}dzdydx &= \int_0^1\int_1^{e^x}\frac{1}{y}e^{yz}\Big|_{z=\frac{x}{y}}^{z=\frac{1}{y}}dydx\\ &= \int_0^1\int_1^{e^x}\frac{1}{y}(e-e^x)dydx\\ &= \int_0^1 (e-e^x)\ln y\Big|_{y=1}^{y=e^x}dx\\ &= \int_0^1 (e-e^x)xdx\\ &= \frac{e}{2} - 1\end{aligned}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Gesucht ist der Wert des Bereichsintegrals

$$\iiint_M 1\,dxdydz$$

Das lässt sich auf mehrere Weise berechnen. Die einfachste Methode ist, die Menge M als Bereich darzustellen gemäß

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in [-1,1], x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}], z \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]\}.$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\iiint_M 1\,dxdydz &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dxdzdy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2\sqrt{1-y^2}dzdy \\
&= 4\int_{1}^{1} (1-y^2)dy = 4 * (2 - \frac{2}{3}) = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Eine weitaus kompliziertere Variante zur Berechung dieses Integrals stellt den Bereich M dar als

$M = \{(x,y,z) \mid x \in [-1,1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}], z \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]\}.$

Es sei M_+ der Teil von M im ersten Oktanten, dann gilt (wegen der Symmetrie der Menge M bzgl. Spiegelung an den Koordinatenachsen) $\mathrm{Vol}(M) = 8$ $\mathrm{Vol}(M_+)$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(M_+) = \iiint\limits_{M_+} 1dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y\sqrt{1-y^2} - \arccos y \right]\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2}x - \arccos(\sqrt{1-x^2}) + \frac{\pi}{2} \right] dx
\end{aligned}$$

Der Wert des letzten Integrals ist $\frac{\pi}{2}$, für das erste Integral berechnet man z.B. mit der Substitution $x = \cos(t)$

$$\int\limits_{\pi/2}^{0} \cos t \sin t(-\sin t)dt = \frac{1}{3}\sin^3 t|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

(Alternativ kann man auch bemerken, dass $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ eine Stammfunktion von $x\sqrt{1-x^2}$ ist, was natürlich zu demselben Ergebnis führt.)

Das zweite Integral ergibt mit der Substitution $x = \sin t$ den Wert

$$\int\limits_0^{\pi/2} t\cos t dt = (t\sin t + \cos t)\,|_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1$$

und folglich

$$\mathrm{Vol}(M_+) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \pi/2 + 1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(M) = \frac{16}{3}.$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

(a) $(1,4)$, $(2,2)$ und $(\sqrt{\frac{1}{2}}, 2)$ sind die Schnittpunkte der drei Kurven. M ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y)|\sqrt{\frac{1}{2}} \le x \le 2,\ y \ge 2,\ y \le \frac{4}{x},\ y \le 4x^2\} \\ &= \{(x,y)|\sqrt{\frac{1}{2}} \le x \le 1,\ 2 \le y \le 4x^2\} \cup \{(x,y)|1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le \frac{4}{x}\}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \iint\limits_M 1dxdy &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \int_2^{4x^2} 1dydx + \int_1^2 \int_2^{\frac{4}{x}} 1dydx \\ &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 (4x^2-2)dx + \int_1^2 (\frac{4}{x} - 2)dx \\ &= (\frac{4}{3}x^3 - 2x)\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 + (4\ln x - 2x)\Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{8}}) - 2 + \sqrt{2} + 4(\ln 2 - \ln 1) - 4 + 2 = -\frac{8}{3} + 4\ln 2 + \sqrt{2} - \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{8}}. \\ &\approx 1.99 \end{aligned}$$

(b) Sei (x_S, y_S) der Schwerpunkt von M. Dann gilt

$$x_S = \frac{\iint\limits_M x dxdy}{\iint\limits_M 1dxdy} \quad \text{und}$$

$$y_S = \frac{\iint\limits_M y dxdy}{\iint\limits_M 1dxdy}.$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_M x dx dy &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} \int_{2}^{4x^2} x dy dx + \int_{1}^{2} \int_{2}^{\frac{4}{x}} x dy dx \\
&= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} xy\Big|_2^{4x^2} dx + \int_1^2 xy\Big|_2^{\frac{4}{x}} dx \\
&\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} (4x^3 - 2x) dx + \int_1^2 (4 - 2x) dx \\
&= (x^4 - x^2)\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} + (4x - x^2)\Big|_1^2 \\
&1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + 8 - 4 - 4 + 1 = \frac{5}{4} \\
\iint\limits_M y dx dy &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} \int_{2}^{4x^2} y dy dx + \int_{1}^{2} \int_{2}^{\frac{4}{x}} y dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} y^2\Big|_2^{4x^2} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 y^2\Big|_2^{\frac{4}{x}} dx \\
&2 \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} (4x^4 - 1) dx + 2 \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) dx \\
&= 2\left(\frac{4}{5}x^5 - x\right)\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} - 2\left(\frac{4}{x} + x\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{8}{5} - \frac{1}{5\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 + 8 - 4 + 2 = \frac{13}{5} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \\
&\approx 3.17
\end{aligned}
$$

also $(x_S, y_S) \approx (0.63, 1.59)$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 28. Juni 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
11. Übung Analysis II für Ingenieure
(Integral-Transformationssatz in $\mathbb{R}^n$)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Die Menge M ist ein abgeschlossenes "Tortenstück" mit einem Innenwinkel von $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, das aus einer gelochten Torte vom Innenradius 1, Außenradius 2 und der Höhe 2 herausgeschnitten wurde. In Zylinderkoordinaten $f(\rho, \phi, z) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi), z)$ ist M also die Menge aller Vektoren (ρ, ϕ, z) in $\mathbb{R}^3$ mit

$$\rho \in [1, 2], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}], \quad 0 \leq z \leq 2\,.$$

Damit ergibt sich für das Volumen

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_M 1\,dV \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \int_0^2 \rho dz\,d\rho\,d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\phi \int_1^2 \rho\,d\rho \int_0^2 1\,dz \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \pi. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

(i) Wir verwenden die Transformation

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\phi\sin\theta \\ y &= br\sin\phi\sin\theta \\ z &= cr\cos\theta \end{aligned}$$

mit $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi[$, $\theta \in [0, \pi]$. Unter Verwendung der dreidimensionalen Transformationsformel (und der Annahme, dass $a, b, c > 0$) folgt dann

$$\begin{aligned}
\iiint_E 1\, dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| \det \begin{pmatrix} ax'(r,\phi,\theta) \\ by'(r,\phi,\theta) \\ cz'(r,\phi,\theta) \end{pmatrix} \right| d\theta d\phi dr \\
&= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| \det \begin{pmatrix} x'(r,\phi,\theta) \\ y'(r,\phi,\theta) \\ z'(r,\phi,\theta) \end{pmatrix} \right| d\theta d\phi dr \\
&= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr \\
&= \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{e^{-f(x,y,z)}}{\sqrt{f(x,y,z)}}\, dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-r^2}}{r} \left| \det \begin{pmatrix} ax'(r,\phi,\theta) \\ by'(r,\phi,\theta) \\ cz'(r,\phi,\theta) \end{pmatrix} \right| d\theta d\phi dr \\
&= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} re^{-r^2} \sin\theta d\theta d\phi dr \\
&= 4\pi abc \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 \\
&= 2\pi abc(1 - \frac{1}{e}).
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

In Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \end{pmatrix}$ ist $\vec{c}$ beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} \rho(\phi)\cos\phi \\ \rho(\phi)\sin\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

mit $\rho(\phi) = (1+\cos\phi)$. Die von $\vec{c}$ eingeschlossene Fläche ist in Polarkoordinaten gegeben durch $F := \{(\rho,\phi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[\,|\,\rho \le \rho(\phi)\}$. Das Flächenelement ist $dxdy = \rho d\rho d\phi$, also folgt

$$\begin{aligned}
\iint_F 1 dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\phi} \rho d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\phi)^2 d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\phi)) d\phi \\
&= \frac{1}{2} \left[2\sin\phi + \frac{3}{2}\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi) \right]_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{2}(0 + 3\pi + 0) = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

(i) In Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned}\iint_K 1 dxdy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho d\phi d\rho \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

(ii) Die Menge G ist der Kreis K mit Radius $\sqrt{2}$ aus dem das offene Quadrat $Q =]-1,1[^2$ entfernt wurde. Also gilt

$$\iint_G (x^2+y^2)\, dxdy = \int_K (x^2+y^2)\, dxdy - \int_Q (x^2+y^2)\, dxdy.$$

Für das zweite Integral erhält man

$$\begin{aligned}\iint_Q (x^2+y^2)\, dxdy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2+y^2\, dx\, dy = 2\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y^2\, dx\, dy = 4\int_{-1}^1 y^2\, dy \\ &= 4\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Für das erste Integral benutzen wir wieder Polarkoordinaten. Also folgt:

$$\int_K (x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\phi\, d\rho = \left[\frac{1}{2}\pi\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Also erhält man

$$\int_G (x^2+y^2)\, dxdy = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x,y,z) dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\theta}{1+r^2}\, d\theta\, d\phi\, dr \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2}\, d\phi\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+r^2}\, dr \\ &= 4\pi(1-\arctan(1)).\end{aligned}$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Die angegebene Menge M stellt einen um die z-Achse rotierenden Zylinder der Höhe 1 dar. Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene. Bei festem z ergeben sich als Querschnitt Kreise mit dem Radius 1. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit Volumenelement $dxdydz = r\ d\varphi dr dz$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_M \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdydz \\
&= \int_1^4 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}\, r\ d\varphi dr dz \\
&= 2\pi \int_1^4 \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\ dr dz \\
&= 2\pi \int_1^4 z^{-\frac{1}{2}}\ dz \\
&= 2\pi \left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 18. Juli 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
12. Übung Analysis II für Ingenieure
(Oberflächen- und Flussintegrale)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Die Parametrisierung der Wendelfläche ist in der Aufgabenstellung gegeben. Alle notwendigen Größen zur Oberflächenberechnung sind:

$$v_r(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix},\ v_\phi(r,\phi) = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix},\ v_r \times v_\phi = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ r \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich $||v_r \times v_\phi|| = \sqrt{1+r^2}$ und die Oberfläche der Wendelfläche kann ausgerechnet werden:

$$O = \int\int_S ||v_r \times v_\phi||\, d\phi\, dr = \int_0^2 \int_0^{5\pi} \sqrt{1+r^2} dr\, d\phi$$

Dieses Integral kann mittels der Substitution $r = \sinh t$ gelöst werden. Es ergibt sich damit als Gesamtoberfläche

$$O = \frac{5}{2}\pi\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right).$$

2. Aufgabe

a) Der Rand von B besteht aus drei Teilflächen:

dem Mantel $M = \{(x,y,z)\colon y^2+z^2 = 9,\ -2 \le x \le 4\}$, der Seitenfläche $D_1 = \{x, y, z) \colon y^2 + z^2 \le 9,\ x = -2\}$ und

der Seitenfläche $D_2 = \{(x, y, z) \colon y^2 + z^2 \le 9,\ x = 4\}$.

Die Parametrisierung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ ergibt:

$$M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{k}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t \\ 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix} \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -2 \le t \le 4,$$

$$D_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{l}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -2 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3,$$

$$D_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{h}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 4 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3.$$

Für den Normalenvektor ergibt sich für die Punkte auf M:

$$\vec{n}(r, \varphi, t) = \vec{k}_t \times \vec{k}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\cos\varphi \\ -3\sin\varphi \end{pmatrix},$$

für Punkte auf D_1 :

$$\vec{n}(r, \varphi, t) = \vec{l}_r \times \vec{l}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für Punkte auf D_2 :

$$\vec{n}(r, \varphi, t) = \vec{h}_r \times \vec{h}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Das Integral ber ∂B muss in die drei Randbereiche M, D_1, D_2 zerlegt werden:

$$\int\limits_{\partial}\int\limits_{B} 1\, dO = \iint\limits_{M} 1\, dO + \iint\limits_{D_1} 1\, dO + \iint\limits_{D_2} 1\, dO =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{4}\left|\begin{pmatrix}0\\-3\cos(\varphi)\\-3\sin(\varphi)\end{pmatrix}\right|\,dt\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right|\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right|\,dr\,d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{4} 3dt\,d\varphi\ +2\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\,dr\,d\varphi\ = 54\pi.$$

$$\int_\partial\int_B x(y^2+z^2)\,dO=$$

$$\iint_M x(y^2+z^2)\,dO+\iint_{D_1} x(y^2+z^2)\,dO+\iint_{D_2} x(y^2+z^2)\,dO=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{4} 9t\left|\begin{pmatrix}0\\-3\cos(\varphi)\\-3\sin(\varphi)\end{pmatrix}\right|\,dt\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{3} -2r^2\left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right|\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{3} 4r^2\left|\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}\right|\,dr\,d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{4} 27t\,dt\,d\varphi\ +\int_0^{2\pi}\int_0^{3} -2r^3dr\,d\varphi\ +\int_0^{2\pi}\int_0^{3} 4r^3dr\,d\varphi=405\pi$$

3. Aufgabe

Es entsteht eine Rotationsfläche über der (x,z)-Ebene, die wir wie üblich parametrisieren können mit

$$\vec{u}:[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3;\qquad (r,\phi)\to\begin{pmatrix}r\cos\phi\\h(r)\\r\sin\phi\end{pmatrix}$$

wobei hier $h(r)=r^2$. Die Richtungsableitungen berechen sich als

$$\partial_r\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\h'(r)\\\sin\phi\end{pmatrix}\ \text{ und }\partial_\phi\vec{u}=\begin{pmatrix}r(-\sin\phi)\\0\\r\cos\phi\end{pmatrix},$$

so dass

$$\partial_r\vec{u}\times\partial_\phi\vec{u}=-r\begin{pmatrix}h'(r)\cos\phi\\-1\\h'(r)\sin\phi\end{pmatrix}.$$

Das Flussintegral berechnet sich also gemäss

$$\int\int_S\vec{v}\cdot d\vec{O}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}r^2-r^2\cos^2\phi\\r^3\cos\phi\sin^2\phi\\r^2-r^2\sin^2\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2r^2\cos\phi\\r\\-2r^2\sin\phi\end{pmatrix}d\phi dr=0,$$

denn nach Ausführung des Skalarproduktes entsteht eine Summe von Termen, in denen jeweils mindestens eine der beiden Funktionen $\sin$ und $\cos$ in ungeradzahliger Potenz enthalten ist. Bei der Integration bzgl. ϕ über die volle Periode $[0, 2\pi]$ ergeben diese Integrale aber jeweils den Wert null.

Bemerkung: Mit der Spatproduktformel und demselben Argument erhält man ebenso

$$\int\int_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} r^2 - r^2\cos^2\phi & \cos\phi & -r\sin\phi \\ r^3\cos\phi\sin\phi & 2r & 0 \\ r^2 - r^2\sin^2\phi & \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} d\phi dr = 0,$$

denn bei der Berechnung der Determinante entstehen nur Summanden in denen mindestens $\cos$ oder $\sin$ in einer ungeraden Potenz auftritt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) Der Rand von B besteht aus:

dem Mantel $M = \{(x,y,z)\colon \sqrt{x^2+z^2} = 4-x,\ 2 \le x \le 4\}$ und

der Seitenfläche $D = \{x,y,z)\colon \sqrt{x^2+z^2} \le 2, x = 2\}$.

Parametrisierungen:

$$M: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{k}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t \\ (4-t)\cos\varphi \\ (4-t)\sin\varphi \end{pmatrix} \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 2 \le t \le 4,$$

$$D: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{l}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2.$$

Für den Normalenvektor erhält man für Punkte auf M :

$$\vec{n}(\varphi,t) = \vec{k}_t \times \vec{k}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -(4-t)\sin\varphi \\ (4-t)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= (t-4)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

für Punkte auf D :

$$\vec{n}(r,\varphi) = \vec{l}_r \times \vec{l}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) $\iint\limits_{\partial B} 1\, dO = \iint\limits_{M} 1\, dO + \iint\limits_{D} 1\, dO =$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^4 \left| (t-4)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right| dt\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left| \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^4 (4-t)\sqrt{2}\,dt\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^2 r dr\,d\varphi \;= 2\sqrt{2}\pi(8-6) + 4\pi = 4\pi(1+\sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial B} (4-x-y^2-z^2)\,dO &= \iint_M (4-x-y^2-z^2)\,dO + \iint_D (4-x-y^2-z^2)\,dO \\
&= \int_0^{2\pi}\int_2^4 (4-t-(4-t)^2)(4-t)\sqrt{2}\,dt\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2-r^2) r dr\,d\varphi \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_2^4 (t^3 - 11t^2 + 40t - 48)\,dt + 2\pi \int_0^2 (2r - r^3) dr \\
&= 2\sqrt{2}\pi(60 - \frac{11}{3}56 + 240 - 96) + 0 \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Eine Parametrisierung der Rotationsfläche ist:

$$\vec{u}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-\sqrt{r} \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 \le r \le 1.$$

Das Flussintegral kann man nun streng genommen nur bis auf das Vorzeichen bestimmen. Bzgl. des Körpers $K := \{(x,y,z)|z = 1-\sqrt{t}, x^2+y^2 \le t^2, t \in [0,1]\}$, den man sofort aus S enthält, zeigt $\vec{u}_r \times \vec{u}_\varphi$ nach außen. Wir erhalten damit:

$$
\begin{aligned}
\int\int_S \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{v}(\vec{u}(r,\varphi))\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_\varphi)\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} r^2+2r^2\cos\varphi\sin\varphi \\ (1-\sqrt{r})r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -\frac{1}{2\sqrt{r}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\right)dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} r^2(1+2\cos\varphi\sin\varphi) \\ (1-\sqrt{r})r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{r}\cos\varphi\\ \frac{1}{2}\sqrt{r}\sin\varphi\\ r\end{pmatrix}dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}r^{\frac{5}{2}}(\cos\varphi+2\cos^2\varphi\sin\varphi)+\frac{1}{2}\sin^2\varphi(r^{\frac{3}{2}}-r^2)+r^3\right)dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{7}(\cos\varphi+2\cos^2\varphi\sin\varphi)+\frac{1}{2}\sin^2\varphi(\frac{2}{5}-\frac{1}{3})+\frac{1}{4}\right)d\varphi \\
&= 0+\frac{1}{2}\pi+\int_0^{2\pi}\frac{1}{30}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{30}[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{8}{15}\pi.
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe

Die Parametrisierung der Fläche ist vorgegeben. Die Ableitungen sind:

$$
\vec{u}_s(s,t)=\begin{pmatrix}2s\\ -t\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{u}_t(s,t)=\begin{pmatrix}0\\ -s\\ t\end{pmatrix},
$$

$$
\vec{v}(\vec{u})\cdot(\vec{u}_s\times\vec{u}_t)=det\begin{pmatrix}-5s^2 & 2s & 0\\ -st & -t & -s\\ -t^2 & 0 & t\end{pmatrix}=9t^2s^2
$$

Das Flussintegral ist dann

$$
\int\int_S \vec{v}\cdot d\vec{O} \;=\; \int_0^2\int_0^s 9s^2t^2\,dt\,ds = 3\int_0^2 s^5\,ds = \frac{1}{2}\cdot(2^6-0)=32.
$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 11
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozenten: Bärwolff/Neitzel/Penn-Karras
Assistent: Stephan Stand: 12. Juli 2011
www.isis.tu-berlin.de

Lösungsskizzen zur
13. Übung Analysis II für Ingenieure
(Die Integralsätze von Gauß und Stokes)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Nach dem Satz von Gauß können wir ebenso die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}$ über den Einheitswürfel Q integrieren. Für die Divergenz berechnet man

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 2x + 2y + 2(2-y) = 2x + 4,$$

also

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_Q (2x+4)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+4)\,dx\,dy\,dz = 1 + 4 = 5.$$

2. Aufgabe

Es gilt unter Verwendung von Zylinderkoordinaten $(x,y,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 3x^2z + 3y^2z = 3z(x^2+y^2) = 3zr^2.$$

Außerdem folgt in Zylinderkoordinaten

$$B = \{(r,\varphi,z) | 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, -1 + r\cos\varphi \le z \le 2 + r\cos\varphi\}.$$

Nach dem Satz von Gauss gilt also:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1+r\cos\varphi}^{2+r\cos\varphi} 3zr^2 r dz d\varphi dr \\
&= \frac{3}{2} \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 z^2 \Big|_{-1+r\cos\varphi}^{2+r\cos\varphi} d\varphi dr \\
&= \frac{3}{2} \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 (3 + 6r\cos\varphi) d\varphi dr \\
&= \frac{9}{2} \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr + 9 \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^4 \cos\varphi d\varphi dr \\
&= 9\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 9 \int_0^3 0 dr = \frac{9^3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

Wir parametrisieren $\mathcal{F}$ mit der Abbildung

$$\vec{u} : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Der Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ ist dann das Bild des Randes von $[0,2] \times [0,2\pi]$ unter $\vec{u}$ mit der üblichen Orientierung. Da $(\operatorname{rot} \vec{v})(x,y,z) = (-1,-1,-1)^\top$ und

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial r}(r,\varphi) \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

gilt, folgt

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^2(\sin\varphi + \cos\varphi) - r\right) d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi.$$

Für das Linienintegral $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ leistet nur das Integral über

$$\mathcal{K}_2 = \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\right\}$$

einen Beitrag. Mit der Parametrisierung

$$\vec{w} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

erhalten wir

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi} 4\left(\begin{smallmatrix}\sin\varphi+\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \cos\varphi\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{smallmatrix}\right) d\varphi = -\int_0^{2\pi} 4\sin^2\varphi\, d\varphi$$
$$= -2\big[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\big]_0^{2\pi} = -4\pi.$$

4. Aufgabe

Der Rand von S ist der Einheitskreis in der xy-Ebene. Parametrisierung von ∂S:

$$\vec{\gamma}(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \phi\in[0,2\pi].$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\, d\vec{O} &= \int_{\partial S}\vec{v}\, \vec{ds}\\ &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt\\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sin\phi\cos\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} dt\\ &= 0.\end{aligned}$$