# Musterlösung Juliklausur Am III 2003

## Rechenteil

(R1)

**Aufgabe 1** $\quad \vec{y}' = A\vec{y}$

Ansatz: $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$, $\quad \lambda$ Eigenwert von $A$
$\vec{v}$ Eigenvektor von $A$.

Eigenwerte berechnen

$$\det(A-\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_1$ ist eine dreifache Nullstelle

$a(\lambda_1) = 3$

Eigenvektoren berechnen

$$(A-\lambda_1 E \,|\, \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g(\lambda_1) = 1 \Rightarrow$ Es müssen 2

Hauptvektoren berechnet werden.

$$(A-\lambda_1 E)\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

R2

$(A-\lambda_1 E)\,\vec{v}_3 = \vec{v}_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Hauptvektor der Stufe 2

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist Hauptvektor der Stufe 3

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$c_3 e^t \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_2 - 4 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \vec{f}(y_1, y_2)$ (R3)

Nicht lineares DGL-System liegt vor.

GGL bestimmen $\quad y_1' = y_2' = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_2 - 4 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow y_1^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ GGL sind $\boxed{(2,2)\ ,\ (-2,-2)}$

$J_{\vec{f}}(y_1 y_2) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$J_{\vec{f}}(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda , & 2 \\ 1 , & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -2 - \lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$Re(\lambda_1) = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 0 \Rightarrow$ GGL (2,2) ist instabil

$J_f(-2,-2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 2 + 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{-7}{4}}$

(R4)

$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\frac{3}{2} < 0$

$\Rightarrow$ GGL $(-2,-2)$ ist asymptotisch stabil....

<u>Aufgabe 3</u> $\quad f(z) = \dfrac{z^2-1}{\cos^2(\pi z)-1}$

Setze $\cos^2(\pi z) = 1$ $\quad \boxed{z_k = k \in \mathbb{Z}}$ sind isolierte Singularitäten von $f$

<u>1. Fall</u> $\boxed{z_k \neq 1, -1}$ (nicht notwendig für die Aufgabe)

$$\lim_{z \to z_k} (z-z_k)^2 f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{(z-z_k)^2 (z^2-1)}{\cos^2(\pi z) - 1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}.$$

$$\lim_{z \to z_k} \frac{2(z-z_k)(z^2-1) + 2z(z-z_k)^2}{2\cos(\pi z)\cdot(-\pi \sin(\pi z))} =$$

$$= \lim_{z \to z_k} \frac{2(z-z_k)(2z^2 - z z_k - 1)}{-2\pi \cos(\pi z)\sin(\pi z)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{z \to z_k} \frac{2(2z^2 - z z_k - 1) + 2(z-z_k)(4z - z_k)}{+2\pi^2 \sin^2(\pi z) - 2\pi^2 \cos^2(\pi z)} = \frac{2(k^2-1)}{-2\pi^2}$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}(k^2-1) \neq 0 \text{ für } k \neq 1, -1$$

$\Rightarrow$ $f$ hat in $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ einen Pol 2. Ordnung

2. Fall $\boxed{z_4 = 1, -1}$ (nicht notwendig für die Aufgabe) R5

$$\lim_{z\to\pm 1} (z\mp 1)\, f(z) = \lim_{z\to\pm 1} \frac{(z\mp 1)(z^2-1)}{\cos^2(\pi z)-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{z\to\pm 1} \frac{(z^2-1)+(z\mp 1)\,2z}{2\cos(\pi z)\cdot(-\pi\sin(\pi z))} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{z\to\pm 1} \frac{2z + 2z + 2(z\mp 1)}{+2\pi^2\sin^2(\pi z) - 2\pi^2\cos^2(\pi z)} = \frac{\pm 4}{-2\pi^2} = \mp\frac{2}{\pi^2} \neq 0$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $z_4 = \pm 1$ einen Pol 1. Ordnung.

$$\mathrm{res}_1 f = -\frac{2}{\pi^2}, \quad \mathrm{res}_{-1} f = \frac{2}{\pi^2}, \quad \mathrm{res}_0 f = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2(z^2-1)}{\cos^2(\pi z)-1}\right)_{z=0} = 0$$

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz = 2\pi i\left(\mathrm{res}_0 f + \mathrm{res}_1 f + \mathrm{res}_{-1} f\right) = 2\pi i\left(\frac{-2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\right) = 0$$

Aufgabe 4

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \frac{1}{s^2-4}$$

$$f(t) = \sum_{s\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_s\left(F(s)\, e^{st}\right) = \sum_{s\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_s\left(\frac{e^{st}}{s^2-4}\right)$$

$$\mathrm{res}_2\left(\frac{e^{st}}{s^2-4}\right)+\mathrm{res}_{-2}\left(\frac{e^{st}}{s^2-4}\right)$$

(R6)

$\frac{e^{st}}{s^2-4}$ hat in $z_0=2$ und $z_0=-2$ eine Pol 1. Ordnung

$$\Rightarrow \mathrm{res}_2 \frac{e^{st}}{s^2-4}=\lim_{s\to 2}(s-2)\frac{e^{st}}{s^2-4}=\frac{e^{2t}}{4}$$

$$\mathrm{res}_{-2} \frac{e^{st}}{s^2-4}=\lim_{s\to -2}(s+2)\frac{e^{st}}{s^2-4}=\frac{e^{-2t}}{-4}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{e^{2t}}{4}-\frac{e^{-2t}}{4}=\frac{1}{2}\sinh(2t)$$