Musterlösung Juliklausur Ana III SS 2003

V1

Verständnisteil

Aufgabe 1 Es gilt $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$$e^{A}\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \vec{v} = e^{\lambda} \vec{v}$$

Aufgabe 2

$y'' - y = 0 \Leftrightarrow y'' = y$

$y_1(x) = e^x$	$y_2(x) = e^{-x}$	$y_3(x) = \sinh(x)$
$y_1'(x) = e^x$	$y_2'(x) = -e^{-x}$	$y_3'(x) = \cosh(x)$
$y_1''(x) = e^x$	$y_2''(x) = e^{-x}$	$y_3''(x) = \sinh(x)$

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3$ erfüllen die DGL

Ein mögliches FS ist z.B. $\{e^x, e^{-x}\}$

$y_1\ y_2$ sind linear unabhängig.

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Die 3 Funktionen sind linear abhängig! ($\sinh(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$)

V2

Aufgabe 3

$y(x) = -\cos(x) - \sin(x) + 1$ löst zwar die DGL, ...

aber nicht die Randbedingung $y(\pi) = 0$, weil

$y(\pi) = 1 + 1 = 2 \neq 0$!

Aufgabe 4

Die Kreislinie $|z-1| = 1$ enthält die Punkte

$z_0 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = 1+i$

$T(z) = \frac{1}{z}$ ist eine Möbiustransformation, das

Bild der Kreislinie ist daher ein Kreis oder eine

Gerade. $T(z_0) = \infty$ ⇒ Das Bild ist eine Gerade

$T(z_1) = \frac{1}{2}$, $T(z_2) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ⇒ Das

Bild ist die Gerade $Re(w) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 5

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z + 1}{z^2} = \overbrace{z + 1}^{\text{Nebenteil}} + \overbrace{\frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}}^{\text{Hauptteil}}$$

Das ist die Laurentreihe von f um $z_0 = 0$, $\operatorname{res}_{z=0} f = 3$.

f besitzt in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 2.

Aufgabe 6

(V3)

$f(\frac{1}{n}) = 1$ und $f(\frac{i}{n}) = -1$

$z_n = \frac{1}{n}$, $\hat{z}_n = \frac{i}{n}$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{z}_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{z}_n) = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} f(z)$ ex. nicht $\rightarrow$ f hat in $z_0 = 0$ keine hebbare Singularität, andererseits ist

$\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| \neq \infty$ $\rightarrow$ f hat in $z_0 = 0$ keinen Pol

$\rightarrow$ f besitzt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität