Musterlösung Rechenteil Ana III
Oktober Klausur

(R 1)

Aufgabe 1

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

Es handelt sich um ein homogenes, lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung.

Lösung mittels Euleransatz: $\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, λ Eigenwert von A, $\vec{v}$ zugehöriger Eigenvektor von A.

Die Eigenwerte von A lassen sich ablesen (A ist obere Dreiecksmatrix)

$$\boxed{\lambda_1 = 2 \,,\quad \lambda_2 = 2 \,,\quad \lambda_3 = 3}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ bestimmen

$$(A - \lambda_{1,2} E \mid \vec{0}\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$a(\lambda_{1,2}) = 2 > g(\lambda_{1,2}) = 1$ (es fehlt ein Eigenvektor)

Hauptvektor $\vec{v}_2$ der Stufe 2 bestimmen

$$(A - \lambda_{1,2} E)\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\vec{v}_2$ ist linear unabhängig von $\vec{v}_1$.

R2

Eigenvektoren zu λ_3 bestimmen

$$\left(A-\lambda_3 E \mid \vec{o}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des Dgl-Systems

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(R3)

Aufgabe 2 $y''+\lambda y=0$ $y(0)=0$, $y'(\pi)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Es handelt sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, mit dem Parameter $\lambda\in\mathbb{R}$.

Lösung mittels Eulersatz $y(x)=e^{\mu x}$

Charakteristisches Polynom: $\mu^2+\lambda=0$

$\Leftrightarrow \mu^2=-\lambda$

1. Fall $\lambda<0$, setze $\lambda=-d^2$, $d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \mu^2=d^2 \Rightarrow \mu_1=d,\ \mu_2=-d$

$\Rightarrow y(x)=c_1e^{dx}+c_2e^{-dx}$, $y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$

$y'(x)=c_1de^{dx}-c_2de^{-dx}$, $y'(\pi)=0 \Rightarrow c_1de^{d\pi}-c_2de^{-d\pi}=0$

$\Rightarrow c_1=c_2=0$ $(d\neq 0)$

$\Rightarrow y\equiv 0$ (triviale Lösung)

2. Fall $\lambda=0$

$\Rightarrow \mu^2=0 \Rightarrow \mu_1=\mu_2=0 \Rightarrow y(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

$y(0)=0 \Rightarrow b=0$ $y'(\pi)=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow y\equiv 0$ (triviale Lsg.)

3. Fall $\lambda>0$ Setze $\lambda=d^2$, $d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \mu^2=-d^2$ $\mu_1=id$, $\mu_2=-id$

R4

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos(dx) + c_2 \sin(dx)$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{y(x) = c_2 \sin(dx)}$

$y'(x) = c_2 d \cos(dx)$

$y'(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 d \cos(d\pi) = 0$

$c_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ (triviale Lösung), also $c_2 \neq 0$, $d \neq 0 \Rightarrow$

$\cos(d\pi) = 0 \Rightarrow d_k\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen vom Cosinus)

$\Rightarrow \boxed{d_k = \frac{2k+1}{2}}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{\lambda_k = d_k^2 = \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}$ Das sind die Eigenwerte zum gegebenen Randeigenwertproblem.

$\boxed{y_k(x) = c_k \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)}$, $c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$ Das sind Eigenlösungen zum gegebenen Randeigenwertproblem.

Aufgabe 3 $u(x,y) = \sin(y)\sinh(x)$

(R5)

Sei $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

v ist so zu bestimmen, dass $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine regulär analytische Funktion ist

Bestimme v mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x}$

$$u_x = \sin(y)\cosh(x) \overset{!}{=} v_y$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \sin(y)\cosh(x)\,dy + c(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = -\cos(y)\cosh(x) + c(x)}$$

$$u_y = \cos(y)\sinh(x) \overset{!}{=} -v_x = \cos(y)\sinh(x) - c'(x)$$

$\Rightarrow -c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c \in \mathbb{C}$ setze $\underline{c=0}$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = -\cos(y)\cosh(x)}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sin(y)\sinh(x) - i\cos(y)\cosh(x)$$

f ist als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ (u und v sind stetig partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$) und u und v erfüllen die CR-DGL'en. $\Rightarrow$ f ist in ganz $\mathbb{C}$ regulär analytisch.

(R6)

<u>Aufgabe 4</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx$

Bestimme die Art und die Lage der isolierten Singularitäten von

$$f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)(4+z^2)}$$

$$1+z^2=0 \iff z^2=-1 \Rightarrow z_1=i,\ z_2=-i.$$

$$4+z^2=0 \iff z^2=-4 \Rightarrow z_3=2i,\ z_4=-2i$$

Es handelt sich um Pole 1. Ordnung!

(Nennergrad ≥ Zählergrad + 2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx \overset{!}{=} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z f$$

$$= 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1=i} f + \operatorname{res}_{z_3=2i} f\right)$$

Pole 1. Ordnung

$$\overset{\text{Pole 1. Ordnung}}{=} 2\pi i\left(\lim_{z\to i}(z-i)f(z) + \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{(z-i)\,z^2}{(1+z^2)(4+z^2)} + \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)\,z^2}{(1+z^2)(4+z^2)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(4+z^2)} + \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(1+z^2)(z+2i)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-1}{6i}+\frac{-4}{-12i}\right) = 2\pi\left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$