Musterlösung Verständnisteil Ana III (V1)

Oktober Klausur

Aufgabe 1

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) $\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -2 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \vec{y}(x)$ (V2)

1) Zeige $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \end{pmatrix}$ und $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x^2 \end{pmatrix}$ erfüllen obige Gleichung.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -2 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{y}_1\,'(x) \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -2 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4x \end{pmatrix} = \vec{y}_2\,'(x) \quad \checkmark$$

2) Zeige $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ sind linear unabhängig

Wronskitest:

$$\det(\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)) = \det \begin{pmatrix} 2 & x \\ 2x & 2x^2 \end{pmatrix} = 4x^2 - 2x^2 = 2x^2 \neq 0$$

für $x \neq 0$. $\Rightarrow$ $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ sind linear unabhängig.

$\overset{1/2)}{\Rightarrow}$ $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ bilden ein Fundamentalsystem des gegebenen DGL-Systems.

Aufgabe 3

(V3)

Allgemeine Form: $(p y')' + (q - \lambda Q) y = 0$ mit

Randbedingung: $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$

$\alpha^2 + \beta^2 > 0, \; \gamma^2 + \delta^2 > 0$

$p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig-differenzierbare Funktionen

$Q : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive, stetige Funktion $\lambda \in \mathbb{R}$ Parameter

Im Bsp: $(x y')' + (1 - \lambda(x^2+1)) y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$

$\Rightarrow p(x) = x, \quad q(x) = 1, \quad Q(x) = x^2 + 1$

$a = 0, \; b = 1, \quad \alpha = \gamma = 1, \; \beta = \delta = 0$

$p, q : [0,1]$ sind stetig differenzierbare Funktionen,

$Q : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist eine positive, stetige Funktion,

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 > 0 \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1 > 0$.

Damit sind alle Bedingungen für ein Sturm-Liouvillesches Randeigenwertproblem erfüllt

Aufgabe 4

(V4)

Die Cauchy'sche Integralformel lautet:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

Setze $f(z) = \frac{e^z}{(z-3)}$ und $\partial B = \partial K_2(0) = \{ |z-0| = 2 \}$

f ist holomorph in $K_3(0) \supset K_2(0)$. Die Voraussetzungen für die Anwendung der Cauchy'schen Integralformel sind erfüllt ($z \in K_2(0)$ frei wählbar)

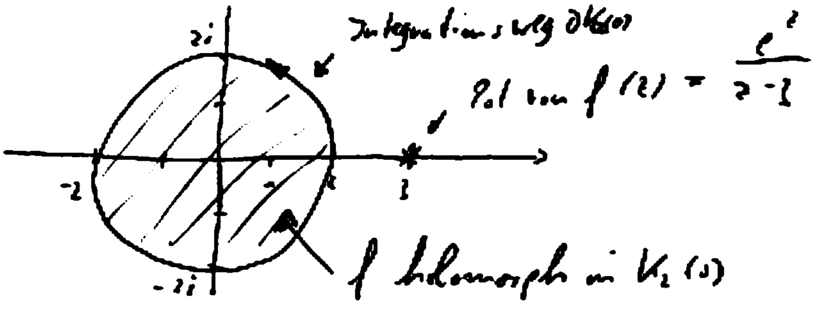
Es gilt also:

$$\frac{e^z}{z-3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_2(0)} \frac{\frac{e^w}{w-3}}{w-z} \, dw \quad \text{für } z \in K_2(0)$$

Zur Bestimmung des gesuchten Integrals wird $z = 0$ gesetzt.

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_2(0)} \frac{e^w}{w(w-3)} \, dw$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial K_2(0)} \frac{e^z}{z(z-3)} \, dz = -\frac{2\pi i}{3} \quad //$$



Aufgabe 5

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \ln(z_1) - \ln(z_0)$$

($\ln z$ ist eine Stammfkt. von $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$)
(Hauptzweig!)

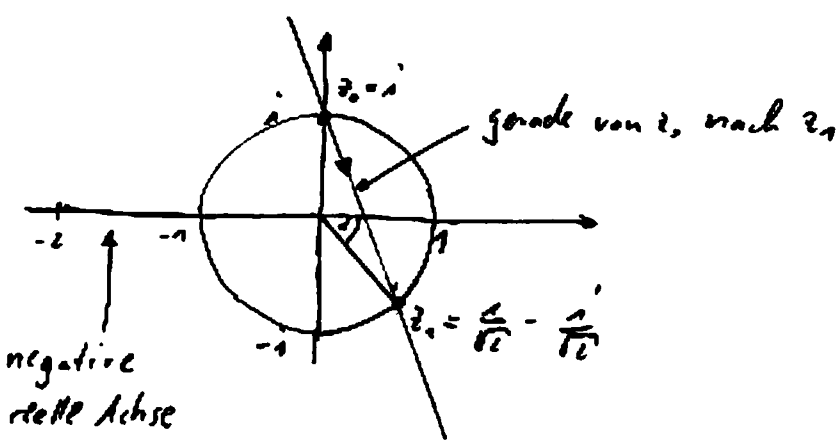
$$\ln(z_1) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right| + i \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln(1) + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -i\frac{\pi}{4}$$

$$\ln(z_0) = \ln(i) = \ln|i| + i \arg(i) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = -i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{3\pi}{4}$$

! Die Gerade von i nach $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ kreuzt nicht die negative reelle Achse!



V6

Aufgabe 6

Gesucht ist $f: \mathbb{C}\setminus\{2\} \to \mathbb{C}$ regulär-analytisch mit einem Pol 3. Ordnung in $z_0 = 2$

Setze $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$

$\operatorname{res}_{z=2} f = a_{-1} = 0$, $\operatorname{res}_{z_1=0} f = 0$ (f ist in $z_0 = 0$ holomorph)

$$f(z) = \frac{0}{(z-2)} + \frac{0}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^{3}}$$

(Hauptteil der Laurentreihe von f um $z_0 = 2$)

$\operatorname{res}_{z_0=2} f = 0$

f hat in $z_0 = 2$ einen Pol 3 Ordnung