TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 04
Fakultät II - Mathematik 20.7.2004
Dozent: Prof. Günter Frank
Assistent: Kevin Bauer

Musterlösung Juli-Klausur SS 2004
Analysis III für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe (10 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

Also gibt es nur einen einzigen Eigenwert (1) der algebraischen Vielfachheit 3.

1.Weg Um die Hauptvektoren zu berechnen benötigen wir die Potenzen von $A-E$ bis zur 3. Ordnung:

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Einfachheit halber wählen wir die drei Einheitsvektoren als Hauptvektoren: $v_j = e_j$.
Das Lösungsfundamentalsystem besteht aus den Funktionen

$$\begin{aligned} y_j(x) &= e^x\left(\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}(A-E)^k\right)v_j = (E + x(A-E) + \frac{x^2}{2}(A-E)^2)e_j \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x+\frac{x^2}{2} & x & 0 \end{pmatrix} e_j \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.Weg Berechnung des einzigen Eigenvektors:

$$(A - E)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Hauptvektoren:

$$(A - E)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - E)v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x v_1 + c_2 e^x (v_2 + x v_1) + c_3 e^x (v_3 + x v_2 + \frac{x}{2} v_3) \\ &= c_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + x \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Aufgabe (9 Punkte)

Setze $f(z) := z^2$, $g(z) := (z^2 + 4)(z^2 + 9) = (z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)$. Dann besitzt $\frac{f(z)}{g(z)}$ Pole erster Ordnung bei $\pm 2i$, $\pm 3i$. Wir benötigen nur die Pole oberhalb der reellen Achse für die Berechnung des Integrals. Da $g(2i) = g(3i) = 0$ und $g'(2i) = 20i \neq 0$, $g'(3i) = -30i \neq 0$ berechnen sich die Residuen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} Res(\frac{f(z)}{g(z)}, 2i) &= \frac{f(2i)}{g'(2i)} = \frac{-4}{20i} = \frac{i}{5}, \\ Res(\frac{f(z)}{g(z)}, 3i) &= \frac{f(3i)}{g'(3i)} = \frac{-9}{-30i} = -\frac{3i}{10}. \end{aligned}$$

$\frac{f(z)}{g(z)}$ hat keine Pole auf der reellen Achse und $\deg(f) = 2 \leq 2 = \deg(g) - 2$. Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, und wir können das Integral mit Hilfe des Residuensatzes berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 2\pi i (Res(\frac{f(z)}{g(z)}, 2i) + Res(\frac{f(z)}{g(z)}, 3i)) = \frac{\pi}{5}.$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

Betrachte die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - 4\mu + 4 - \lambda = 0 \Rightarrow \mu = 2 \pm \sqrt{\lambda}.$$

1.Fall: $\lambda > 0$. Wir bekommen als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{(2+\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{\lambda})x} = e^{2x}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Randbedingungen lauten also:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ y(2\pi) &= e^{4\pi} c_1 (e^{2\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-2\pi\sqrt{\lambda}}) = 2e^{4\pi} c_1 \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Also gibt es keine Eigenwerte $\lambda > 0$

2.Fall: $\lambda = 0$. Hier lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Die Randbedingungen liefern

$$y(0) = c_1 = 0, \;\; y(2\pi) = 2\pi c_2 e^{4\pi} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Also ist auch $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

3.Fall: $\lambda < 0$. Die allgemeine Lösung lautet hier

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)).$$

Für die Randbedingungen gilt:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y(2\pi) &= e^{4\pi} c_2 \sin(2\pi\sqrt{-\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{k}{2}, \; k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also gibt es Eigenwerte $\lambda_k = -\frac{k^2}{4}$ mit den zugehörigen Eigenfunktionen $y_k(x) = ce^{2x}\sin(\sqrt{-\lambda_k}x) = ce^{2x}\sin(\frac{k}{2}x),\ c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$.

4. Aufgabe (9 Punkte)

a) Als Möbiustransformation hat T die Form

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0. \\ T(-i) &= \infty \Rightarrow -ic + d = 0 \Rightarrow d = ic. \\ T(i) &= 1 \Rightarrow \frac{ai}{2ci} = \frac{a}{2c} = 1 \Rightarrow a = 2c. \end{aligned}$$

Also hat T die Form

$$T(z) = \frac{2cz}{cz+ic} = \frac{2z}{z+i}.$$

b) Die imaginäre Achse verläuft durch die Punkte $0, -i$ und i. Diese werden widerum abgebildet auf die Punkte $0, \infty$ und 1. Diese liegen aber gerade auf der reellen Achse (Gerade durch 0 und 1). Also wird die imaginäre Achse abgebildet auf die reelle Achse. Um das Bild des Einheitskreises zu berechnen, berechnen wir zusätzlich das Bild des Punktes 1:

$$T(1) = \frac{2}{1+i} = 1 - i.$$

Also bildet T die Punkte $-i, i$ und 1 auf die Punkte $\infty, 1$ und $1-i$ ab. Also wird der Einheitskreis abgebildet auf die Gerade, die parallel zur y-Achse durch den Punkt 1 verläuft (Gerade durch die Punkte 1 und $1-i$).

Gesamtpunktzahl: 40

Verständnisteil

1. Aufgabe (7 Punkte)

1\. Weg Die Funktion $f(z) = \frac{\cos(z)}{z+2}$ hat in der Einheitskreisscheibe $|z| \leq 1$ keine Singularitäten. Damit gilt nach der Cauchy'schen Integralformel

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z(z+2)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = \pi i.$$

2\. Weg Mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel und des Cauchy'schen Integralsatzes gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z(z+2)} dz &= \frac{1}{2}\left(\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz - \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z+2} dz\right) \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i \cos(0) - 0) = \pi i. \end{aligned}$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt:

$$f(z) = \frac{z^2+2z+2}{(z+1)^3} = \frac{(z+1)^2+1}{(z+1)^3} = \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^3}.$$

Das ist auch schon die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = -1$. Und das Residuum kann man auch direkt ablesen, und zwar gilt:

$$Res(f, -1) = 1.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

- Offensichtlich löst y_1 das Randwertproblem.
- y_2 erfüllt zwar die Randwertbedingungen, löst aber nicht die Differentialgleichung, also löst es das Randwertproblem <u>nicht</u>.
- y_3 löst zwar die Differentialgleichung, aber die Randwerte sind wegen $y_3(0) = 2 \neq 1$ nicht erfüllt. Also löst auch y_3 das Randwertproblem <u>nicht</u>.

4. Aufgabe (9 Punkte)

- $\Delta u_1 = 2 - 2 = 0$. Also ist u_1 harmonisch, und da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, ist u_1 der Realteil einer regulär analytischen Funktion mit dem Imaginärteil v_1. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} \Rightarrow v_1(x, y) = 2xy + y + c(x).$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -2y - 1 = -\frac{\partial v_1}{\partial x} = -2y - c'(x) \Rightarrow v_1(x, y) = 2xy + y + x + c.$$

Damit lautet die regulär analytische Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + x - y + i(2xy + y + x + c) \\ &= (x + iy)^2 + x + iy + i(x + iy) + ic = z^2 + z(1 + i) + ic. \end{aligned}$$

- $\Delta u_2 = 6x + 2y - 2 \neq 0$. Also ist u_2 nicht harmonisch und kann nicht der Realteil einer regulär analytischen Funktion sein.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Dem Lösungsfundamentalsystem sieht man an, daß $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ ist. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ muss also gelten: $Av_1 = v_1$ und $Av_2 = -v_2$, also:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b \\ -c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann leicht sehen, daß $a = 0,\ b = 1,\ c = 1$ und $d = 0$ die Gleichungen lösen. Also gilt für die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesamtpunktzahl: 40