TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 04

Fakultät II - Mathematik 12.10.2004

Dozent: Prof. Günter Frank

Assistent: Kevin Bauer

Musterlösung Oktober-Klausur SS 2004
Analysis III für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe (8 Punkte)

Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\alpha z}}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=2}\left(-\frac{e^{\alpha z}}{z+i}+\frac{e^{\alpha z}}{z-i}\right)dz \\ &= \frac{2\pi i}{2i}\left(-e^{\alpha z}|_{z=-i}+e^{\alpha z}|_{z=i}\right) \\ &= \pi(-e^{-\alpha i}+e^{\alpha i}) = 2\pi\sin(\alpha).\end{aligned}$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = (\lambda-2)(\lambda-3).$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2: \; A-2E = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 3: \; A-3E = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine homogene Lösung:

$$y_h(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet: $y_p(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Damit gilt:

$$y_p'(t) = y_p(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und

$$Ay_p(t) + b = e^t(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} a - b + 1 \\ 2a + 4b + 2 \end{pmatrix}$$

$a = -\frac{5}{2}$ und $b = 1$ lösen dieses lineare Gleichungssystem. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = e^t \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Also ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachhiet 2 und $\lambda_2 = 3$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachhiet 1. Berechnung der Eigen- und Hauptvektoren zu $\lambda_1 = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also hat $A - E$ den Rang 2, es gibt also nur den einen Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der fehlende Hauptvektor berechnet sich nach

$$(A-E)v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_2 = 3$:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^t(c_1 v_1 + c_2(v_2 + t v_1)) + e^{3t} c_3 v_3 = e^t(c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}) + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Die Laurentreihe lautet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k \\ &= \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k = \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-1)^k \end{aligned}$$

Das Residuum von f an der Stelle $z = 1$ lautet somit: $Res(f, 1) = 1$.

Gesamtpunktzahl: 40

Verständnisteil

1. Aufgabe (8 Punkte)

Mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel bekommen wir:

$$\oint\limits_{|z+1|=r_j} \frac{5\,dz}{(z+3)(z-2)} = \oint\limits_{|z+1|=r_j} \left(-\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z-2}\right) dz$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } j=1 \;\; (r_1 = 1) \\ -2\pi i, & \text{falls } j=2 \;\; (r_2 = \frac{5}{2}) \\ -2\pi i + 2\pi i = 0, & \text{falls } i=3 \;\; (r_3 = 4) \end{cases}$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Die Matrix hat nur die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Diese kann man den Argumenten der Exponentialfunktionen ablesen. Am der zweiten Lösung erkennt man, daß der erste Eigenwert $\lambda_1 = 1$ nur einen (linear unabhängigen) Eigenvektor besitzt (die zweite Lösung bekommt man mit Hilfe eines Hauptvektors). Der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 3$ hat ohnehin nur einen (linear unabhängigen) Eigenvektor. Damit lauten die zwei Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

Die imaginäre Achse wird auf einen Kreis (oder eine Gerade) abgebildet. Da die imaginaäre Achse die reelle Achse und den Einheitskreis senkrecht schneidet muß daß Bild der imaginären Achse die reelle und imaginäre Achse senkrecht schneiden. Unter allen Kreisen und Geraden erfüllen das aber nur die Kreise um den Ursprung. Desweiteren wissen wir jedoch, daß i (der ja auf der imaginären Achse liegt) auf $2i$ abgebildet wird. Damit wird die imaginäre Achse auf den Kreis um den Ursprung mit Radius 2 abgebildet.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Man kann leicht (durch schaftes Hinsehen oder eine kurze Rechnung) sehen, daß die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nur die 0 als einzigen Eigenwert besitzt. Den (linear unabhängigen!) Lösungen y_1 und y_2 sieht man jedoch an, daß sie mit zwei linear unabhängigen Hauptvektoren berechnet wurden. Somit braucht man nur noch die Lösung anzugeben, die dem (einzigen!) Eigenvektor entspricht. Dieser lautet z.B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also sieht ein mögliches Lösungsfundamentalsystem so aus:

$$\{y_1(t), y_2(t), y_3(t)\} = \{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

5. Aufgabe (8 Punkte)

- 1. Weg (mit Hilfe des Residuensatzes).
  Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$ besitzt im Punkt $z = 0$ ihre einzige Singularität. Die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 berechnet sich nach

  $$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-4}}{k!} = \sum_{k=-4}^{-1} \frac{z^k}{(k+4)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+4)!}$$

  Damit lautet das Residuum von f an der Stelle 0 $Res(f, 0) = \frac{1}{(-1+4)!} = \frac{1}{6}$. Und da der Ursprung im Inneren des Gebietes $|z| \leq 2$ liegt, gilt nach dem Residuensatz:

  $$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4}\, dz = 2\pi i \, Res(f, 0) = \frac{\pi}{3}.$$

- 2. Weg (mittels Formel für die Taylorreihe) Für eine in einer Umgebung von $|z - z_0| \leq r$ regulär analytische Funktion f gilt:

  $$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

In unserem Fall ist $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$ und $n = 3$. Somit ergibt sich

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{\pi}{3}.$$

Gesamtpunktzahl: 40