TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS2005
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ferus • Senkbeil

Lösungen zum Rechenteil der Ana3-Klausur vom 19.7.2005

1. Aufgabe

10 Punkte

$$
\begin{aligned}
ze^z &= (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) \\
&= \underbrace{e^x(x\cos y - y\sin y)}_{u(x,y)} + i\ \underbrace{e^x(x\sin y + y\cos y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_x &= e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) \\
u_y &= e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) \\
v_x &= e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) \\
v_y &= e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \ .
$$

Die Cauchy-Riemann-Bedingungen sind auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt, somit ist f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

2. Aufgabe

10 Punkte

Innerhalb der Kreisscheibe mit Radius 2 hat der Integrand genau zwei einfache Polstellen, nämlich bei $+1$ und -1.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)(z-1)(z+3)(z-4)}\, dz \\
&= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\Big(\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+3)(z-4)}, -1\Big) + \operatorname{Res}\Big(\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+3)(z-4)}, +1\Big) \right) \\
&= 2\pi i \left(\left.\frac{z}{((z+1)(z-1)(z+3)(z-4))\,'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z}{((z+1)(z-1)(z+3)(z-4))\,'}\right|_{z=+1} \right) \\
&= 2\pi i \left(\left.\frac{-1}{(-2)\cdot 2\cdot(-5)}\right|_{z=-1} + \left.\frac{1}{2\cdot 4\cdot(-3)}\right|_{z=+1} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{-1}{20} + \frac{1}{-24} \right) \\
&= -\frac{11\pi i}{60}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe

10 Punkte

$$s(x) = \int \frac{1 - \frac{x}{1-x} - 1}{x}\ dx = \int (x-1)^{-1}\ dx = \ln(x-1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & x\ y'' + \left(1 - \frac{x}{1-x}\right)\ y' - y = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & (x-1)x\ y'' + (2x-1)\ y' + (1-x)y = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & \Big((x-1)x\ y'\Big)' + (1-x)y = 0
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Als Matrix-Vektor-Gleichung lautet die DGl.

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von A berechnen sich über das charakteristische Polynom:

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i\ .$$

Da A nur reelle Koeffizienten hat, benötigt man von den beiden komplex-konjugierten Lösungen nur eine; deren Real- und Imaginärteil bilden dann eine reellwertige Basis des Lösungsraumes.
Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = 2 + i$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} .$$

Die entsprechende komplexe Lösung in Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\begin{aligned}
y(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} &= e^{2x}(\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \\
&= e^{2x} \begin{pmatrix} 2\cos x + i2\sin x \\ (\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x) \end{pmatrix} \\
&= e^{2x} \begin{pmatrix} 2\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} + i\ e^{2x} \begin{pmatrix} 2\sin x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGl.

$$y(x) = e^{2x}\big(a \begin{pmatrix} 2\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2\sin x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix}\big) .$$