TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS2005
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ferus • Senkbeil

Lösungen zum Verständnisteil der Ana3-Klausur vom 19.7.2005

---

1. Aufgabe

10 Punkte

Der erste Quadrant ist das Gebiet oberhalb der reellen Achse und rechts von der imaginären Achse.
Bestimmung der Bilder der Achsen unter f:

$$f(0) = -1 \quad , \qquad f(1) = i \quad , \qquad f(\infty) = 1$$
$$f(0) = -1 \quad , \qquad f(i) = \infty \quad , \qquad f(\infty) = 1$$

- Die reelle Achse wird also auf den Einheitskreis und die imaginäre Achse auf die reelle Achse abgebildet.
- Das Gebiet oberhalb der reellen Achse wird zu dem Gebiet außerhalb des Einheitskreises, das Gebiet rechts von der imaginären Achse wird zu dem Gebiet oberhalb der reellen Achse.
- Insgesamt wird somit der 1. Quadrant auf die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ abgebildet ("$\geq$" ist auch richtig).

2. Aufgabe

10 Punkte

- Die Kurven c_k kann man als Bildkurven der senkrecht um $\frac{1}{2} + k$ verschobenen Winkelhalbierenden des 1./3. Quadranten unter der Abbildung $f(z) = z^3$ betrachten; die Kurven $\tilde{c}_l$ als Bildkurven der senkrecht um $\frac{1}{2} + l$ verschobenen Winkelhalbierenden des 2./4. Quadranten unter der gleichen Abbildung.
- Diese Winkelhalbierenden schneiden sich jeweils unter einem rechten Winkel.
- $f(z) = z^3$ ist als analytische Funktion mit $f'(z) \neq 0$ für $z \neq 0$ überall außer im Ursprung winkelerhaltend.
- Keine der Winkelhalbierenden schneiden sich im Ursprung, also werden alle Schnittwinkel erhalten.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gesucht ist ein DGl.-System der Form

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

mit einer 3x3-Matrix A. Gegebene Lösungen erhält man über den Exponentialansatz, falls A eine konstante Matrix ist und u.a. den Eigenwert -2 mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie den Eigenwert 3 mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt. Solch eine Matrix hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -2 & 0 \\ c & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe

10 Punkte

1. falsch:
   $\sin z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch, nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral Null.

2. falsch:
   ∞ ist als einziger Punkt allen Geraden gemein. Wenn jede Gerade auf eine Gerade abgebildet würde, wäre also der Urbildpunkt (Möbiustransformationen sind bijektiv) von ∞, also $f^{-1}(\infty)$, ein Punkt einer jeden Geraden, also wieder ∞. Es muss somit $f(\infty) = \infty$ gelten.
   Es ist aber $f(\infty) = 1$. Widerspruch.
   (Gegenbeispiele werden auch gewertet.)

3. wahr:
   Das ist der Satz über die Taylorentwicklung analytischer Funktionen.

4. wahr:
   Einsetzen von y_p in die DGl. liefert $-e^{-x} + 4e^{-x} = 3e^{-x}$, eine wahre Aussage.

5. wahr:
   Ableiten von $\vec{w} := \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{y}_j$ in die DGl. liefert

$$\begin{aligned}
\vec{w}\,' = \left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{y}_j \right)' &= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{y}_j\,' \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \left(A(x)\vec{y}_j + b(x) \right) \\
&= A(x) \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{y}_j + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \mu_j}_{1} b(x) \\
&= A(x)\vec{w} + b(x)\ .
\end{aligned}$$

   Also löst $\vec{w}$ die DGl.