TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS2005
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ferus • Senkbeil

Lösungen zum Verständnisteil der Ana3-Klausur vom 19.7.2005

---

1. Aufgabe

10 Punkte

Einfache Polstellen bei -3 und 1 hat z.B. eine Funktion der Gestalt

$$f(z) = \frac{a}{(z+3)} + \frac{b}{(z-1)}$$

mit den Residuen

$$\mathrm{Res}(f, -3) = a \ , \quad \mathrm{Res}(f, 1) = b \ .$$

Nach dem Residuensatz muss dann gelten

$$42\pi = \int_{|z|=5} f(z)\ dz = 2\pi i\ (a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b = \frac{21}{i} = -21i \ .$$

Dies ist z.B. für $a = -i$ und $b = -20i$ erfüllt, somit ist

$$f(z) = \frac{-i}{(z+3)} + \frac{-20i}{(z-1)}$$

eine Lösung.

2. Aufgabe

10 Punkte

Die Kurve c kann durch Dahinterschalten der Kurve

$$\tilde{c}\colon \left[\frac{3}{2}\ ,\ 2\right] \to \mathbb{C} \quad , \qquad \tilde{c}(t) := e^{i\pi t}$$

(Einheitskreissegment von $-i$ nach 1) zu einer geschlossenen Kurve $\hat{c}$ ergänzt werden.
Das Integral entlang $\tilde{c}$ ist:

$$\int_{\tilde{c}} \frac{1}{2z}\ dz = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{2e^{i\pi t}} i\pi e^{i\pi t}\ dt = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{i\pi}{2}\ dt = \frac{i\pi}{4}$$

Das Integral entlang $\hat{c}$ ist nach dem Residuensatz:

$$\int_{\hat{c}} \frac{1}{2z}\ dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2z},\ 0\right) = \pi i$$

Somit ergibt sich für das gesuchte Integral über c:

$$\int_{\hat{c}} \frac{1}{2z}\ dz = \int_{c} \frac{1}{2z}\ dz + \int_{\tilde{c}} \frac{1}{2z}\ dz$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi i = \int_{c} \frac{1}{2z}\ dz + \frac{i\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{c} \frac{1}{2z}\ dz = \pi i - \frac{i\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi i \ .$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Es handelt sich um ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Als Lösungsansatz dazu kennen wir den Exponentialansatz, wozu wir Eigenwerte und Eigenvektoren benötigen.
An der dritten Spalte der Matrix erkennt man einen Eigenwert 4 mit zugehörigem Eigenvektor $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die entsprechende Lösung lautet somit

$$\vec{y}(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Probe:
linke Seite:

$$\vec{y}\,'(x) = 4e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

rechte Seite:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe

10 Punkte

1. falsch:
   $f(z) = z$ hat eine Nullstelle bei $z = 0$. Da f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, sind die Residuen überall Null.

2. wahr:
   Eine Möbiustransformation hat allgemein die Gestalt $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Der Zähler wird genau für $z = -\frac{b}{a}$ Null, der Nenner genau für $z = -\frac{d}{c}$.

3. falsch:
   $f(z) = z$ und $g(z) = -z$ sind Möbiustransformationen, $(f + g)(z) = 0$ aber nicht.

4. wahr:
   Es handelt sich um die Taylorreihe der Exponentialfunktion. Diese konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

5. wahr:
   Der Wronskitest liefert

   $$\begin{pmatrix} z^k & z^l \\ kz^{k-1} & lz^{l-1} \end{pmatrix} = lz^{k+l-1} - kz^{l+k-1} = (l-k)z^{k+l-1} .$$

   Dies ist z.B. für $z = 1$ ungleich Null, was für die lineare Unabhängigkeit ausreicht.