Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05-06
Prof. Dr. Ferus 25. Juli 2006

Juli – Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie mittels geeigneter Cauchy Integralsätze

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\cos z}}{z^3+z^2-z-1} dz.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^3+z^2-z-1}$ lautet

$$\frac{1}{z^3+z^2-z-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+1)} + \frac{C}{(z+1)^2},$$

wobei $A = \frac{1}{4}$ und $C = -\frac{1}{2}$ (Zuhaltemethode), während $B = -\frac{1}{4}$. Deswegen gilt:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{|z|=2} \tfrac{e^{\cos z}}{z^3+z^2-z-1} dz &= \tfrac{1}{4} \oint\limits_{|z|=2} \tfrac{e^{\cos z}}{z-1} dz - \tfrac{1}{4} \oint\limits_{|z|=2} \tfrac{e^{\cos z}}{z+1} dz - \tfrac{1}{2} \oint\limits_{|z|=2} \tfrac{e^{\cos z}}{(z+1)^2} dz \\
&= \tfrac{1}{4} 2\pi\iota \left\{e^{\cos z}\right\}\Big|_{z=1} - \tfrac{1}{4} 2\pi\iota \left\{e^{\cos z}\right\}\Big|_{z=-1} - \tfrac{1}{2} \tfrac{2\pi\iota}{1!} \left\{\tfrac{d}{dz}(e^{\cos z})\right\}\Big|_{z=-1} \\
&= (-\pi\iota)(-\sin -1) e^{\cos -1} = -\pi\iota \sin 1 e^{\cos 1}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos\varphi}$$

mittels Residuenkalkül.

Mit $z = e^{\iota\varphi}, dz = \iota e^{\iota\varphi} d\varphi = \iota z d\varphi$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tfrac{d\varphi}{5+4\cos\varphi} &= \oint\limits_{|z|=1} \tfrac{dz/\iota z}{5+2(z+\frac{1}{z})} \\
&= \tfrac{2\pi}{2\pi\iota} \oint\limits_{|z|=1} \tfrac{dz}{2z^2+5z+2}
\end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{2z^2+5z+2} = \frac{1}{2(z+2)(z+1/2)}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tfrac{d\varphi}{5+4\cos\varphi} &= \tfrac{\pi}{2\pi\iota} \oint\limits_{|z|=1} \tfrac{dz}{(z+2)(z+1/2)} \\
&= \pi \cdot \mathrm{Res}\left(\tfrac{1}{(z+2)(z+1/2)}; z = -\tfrac{1}{2}\right) \\
&= \pi \cdot \tfrac{1}{(z+2)}\Big|_{z=-1/2} \\
&= 2\pi/3
\end{aligned}$$

($z_1 = \frac{-1}{2}$ ist die einzige Singularität von $\frac{1}{(z+2)(z+1/2)}$ was im inneren von der Einheitskreisscheibe um 0, und diese ist eine einfache Polstelle).

3. Aufgabe 10 Punkte

Man gebe die Laurent-Reihenentwicklung von $h(z) = \frac{1+z}{z^3+2\iota z^2-z}$ im Konvergenzbereich $|z+\iota| > 1$ an.

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{1+z}{z^3+2\iota z^2-z}$ lautet:

$$\frac{1+z}{z^3+2\iota z^2-z} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z+\iota} + \frac{1+\iota}{(z+\iota)^2}.$$

Im Bereich $|z+\iota| > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{-1}{z} &= \tfrac{-1}{z+\iota-\iota} \\ &= \tfrac{-1}{z+\iota} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{\iota}{z+\iota}} \\ &= \tfrac{-1}{z+\iota} \cdot \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{\iota}{z+\iota}\right)^k, \end{aligned}$$

und dann:

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z+\iota)^n, \text{ wobei } c_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \geq -1, \\ 1 & \text{, falls } n = -2, \\ \iota^{1-n} & \text{, falls } n \leq -3 \end{cases}$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen zum Sturm-Liouville Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{cases} (xu'(x))' + \frac{\lambda}{x} u(x) = 0 & , \\ u(1) = 0 = u'(e^{2\pi}) & , \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$. (**Hinweis**: Potenzansatz).
Welchen Orthogonalitätsrelationen genügen diese Eigenfunktionen untereinander?

Mit dem vorgeschlagenen Ansatz $u(x) = x^\alpha$ kommt:

$$\left(x\alpha x^{\alpha-1}\right)' + \lambda x^{\alpha-1} = (\alpha^2+\lambda)x^{\alpha-1} = 0, \text{ also } \alpha = \pm\iota\sqrt{\lambda}.$$

Für jede $\lambda > 0$ ist dann die allgemeine Lösung zur linearen Differentialgleichung:

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x).$$

Mit $u(1) = 0$ erhält man sofort $A = 0$, so daß

$$u'(e^{2\pi}) = \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) \cdot \frac{1}{x}\Big|_{x=e^{2\pi}} = \sqrt{\lambda}Be^{-2\pi}\cos(2\pi\sqrt{\lambda}).$$

Also ist die Folge von Eigenwerten durch $\lambda_k = \left(\frac{1}{2\pi}\cdot(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2k+1)}{4}\right)^2$ gegeben, wobei $k \in \mathbb{N}$, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind: $u_k(x) = \sin(\lambda_k \ln x)$. Das vorhandene Sturm Liouville Rand-Eigenwert Problem ist schon in selbstadjungierter Form, und für zwei Eigenfunktionen u_k, u_l zu verschiedenen Eigenwerten λ_k, λ_l gilt:

$$\langle u_k; u_l\rangle_Q = \int_1^{e^{2\pi}} u_k(x)u_l(x) \cdot \frac{1}{x}dx = 0.$$