Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05-06

Prof. Dr. Ferus 25. Juli 2006

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Sei T eine Möbius-Transformation für die:

$$T(\iota) = 0, T(0) = \infty, T(1) = 1 - \iota, T(-\iota) = 2.$$

Seien K der Einheitskreis um die 0 ($K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) und $\Delta = \iota\mathbb{R}$ die imaginäre Achse. Wie werden K und Δ durch T transformiert?

2. Aufgabe

8 Punkte

Sei $H = \mathbb{R}\times]0; +\infty[$, und $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x; y) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Arg}(x - 1 + \iota y) - \operatorname{Arg}(x + 1 + \iota y)\right).$$

Geben Sie ein Dirichlet-Problem auf H an, also eine partielle Differentialgleichung zusammen mit bestimmten Randbedingungen, das durch h gelöst wird.

3. Aufgabe

10 Punkte

Seien $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^3-2z^2+z}$ und $g(z) = \frac{\sin z}{z^2}$.
Geben Sie die Singularitäten von f und g an, und entscheiden Sie in jedem Fall ob diese eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle ist. Falls eine Polstelle vorhanden ist, geben Sie auch ihre Ordnung an.

4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine komplexe Folge für die:

$$\forall n \geq 0, \quad n f_n = f_{n-1} + 2 f_{n-2} \qquad (\text{wobei } f_{-1} = f_{-2} = 0),$$

und sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ die $\mathcal{Z}$-Transformierte von $(f_n)_{n\geq 0}$.
Welcher Gleichung genügt $F(z)$?

5. Aufgabe

7 Punkte

Auf dem Interval $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ betrachtet man das Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{cases} (x^2 + 3x)\cos x\, u''(x) - (x^2 + 3x)\sin x\, u'(x) + \lambda u(x) = 0, \\ u(\frac{\pi}{6}) + u'(\frac{\pi}{6}) = 0 = u(\frac{\pi}{3}) + u'(\frac{\pi}{3}), \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$. Seien $u_k(x), u_l(x)$ zwei Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerte λ_k, λ_l. Welcher Orthogonalitätsrelation genügen u_k und u_l?