Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05-06
Prof. Dr. Ferus 25. Juli 2006

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Sei T eine Möbius-Transformation mit:

$$T(\iota) = 0, T(0) = \infty, T(1) = 1 - \iota, T(-\iota) = 2.$$

Seien K der Einheitskreis um die 0 ($K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) und $\Delta = \iota\mathbb{R}$ die imaginäre Achse. Wie werden K und Δ durch T transformiert?

Durch T wird jeder Kreis und auch jede Gerade in einem Kreis oder in einer Gerade transformiert.
Weil $T(\iota) = 0, T(1) = 1 - \iota$ und $T(-\iota) = 2$ ist $T(K)$ der einzige Kreis, der durch die Stellen $0, 1 - \iota$ und 2 läuft, also der Kreis, der in 1 zentriert ist und Radius 1 hat.
Weil $T(\iota) = 0, T(0) = \infty$ und $T(-\iota) = 2$ ist $T(\Delta)$ eine Gerade, und zwar die einzige Gerade, die durch die Stellen 0 und 2 läuft, also gilt: $T(\Delta) = \mathbb{R}$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Sei $H = \mathbb{R}\times]0; +\infty[$, und $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x; y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arg}(x - 1 + \iota y) - \operatorname{Arg}(x + 1 + \iota y)\right).$$

Geben Sie ein Dirichlet-Problem auf H an, also eine partielle Differentialgleichung zusammen mit bestimmten Randbedingungen, das durch h gelöst wird.

Für jede $z_0 = x_0 + \iota y_0$ definiert $(x, y) \mapsto \operatorname{Arg}\left((x - x_0) + \iota(y - y_0)\right)$, als Imaginärteil einer holomorphen Funktion ($z \mapsto \log(z - z_0)$), eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = y_0, x \leq x_0\}$. Also ist h bestimmt auch harmonisch auf H ($\Delta h(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0$ für $(x, y) \in H$). Andererseits gilt für $x_1 > 1$:

$$\lim_{x\to x_1, y\to 0, y>0} h(x, y) = \frac{1}{\pi}(0 - 0) = 0,$$

während für $-1 < x_2 < 1$:

$$\lim_{x\to x_2, y\to 0, y>0} h(x, y) = \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1,$$

und für $x_3 < -1$:

$$\lim_{x\to x_3, y\to 0, y>0} h(x, y) = \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0.$$

Also definiert h die einzige Lösung zum Dirichlet Problem

$$\begin{cases} \Delta h(x, y) & = & 0 & , (x, y) \in H, \\ \lim\limits_{x\to \overline{x}, y\to 0, y>0} h(x, y) & = & f(\overline{x}), & \end{cases}$$

wobei

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } |\overline{x}| > 1, \\ 1 & , \text{falls } |\overline{x}| < 1. \end{cases}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Seien $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^3-2z^2+z}$ und $g(z) = \frac{\sin z}{z^2}$.
Geben Sie die Singularitäten von f und g an und entscheiden Sie in jedem Fall, ob es wesentliche Singularitäten oder Polstellen sind. Falls eine Polstelle vorhanden ist, geben Sie auch ihre Ordnung an.

Für die erste Funktion gilt:

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z} \cdot \frac{1}{(z-1)^2},$$

also ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität von f, während $z_1 = 1$ eine Polstelle der Ordnung 2 ist. (Das $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität von f definiert sieht man an der Tatsache, daß die Laurent-Reihenentwicklung von $\frac{e^{1/z}}{z}$ um $z_0 = 0$ unendlich viele negative Potenzen von $(z - z_0)$ enthält: $\frac{e^{1/z}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{k!}$).
Für die zweite Funktion gilt, für jede $z \neq 0$:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1},$$

also ist z^{-1} die einzige negative Potenz von z, die in der Laurent-Reihenentwicklung von g um $z_0 = 0$ erscheint, 0 ist also Polstelle der Ordnung 1 für g.

4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine komplexe Folge mit:

$$\forall n \geq 0, \quad n f_n = f_{n-1} + 2 f_{n-2} \qquad (\text{wobei } f_{-1} = f_{-2} = 0),$$

und sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ die $\mathcal{Z}$-Transformierte von $(f_n)_{n\geq 0}$.
Welcher Gleichung genügt $F(z)$?

Die Linearität, Verschiebungs- und Differentiationsregeln liefern sofort:

$$-zF'(z) = \frac{1}{z}F(z) + \frac{2}{z^2}F(z) = \frac{2+z}{z^2}F(z), \text{ also } F'(z) = -\frac{2+z}{z^3}F(z).$$

5. Aufgabe

7 Punkte

Auf dem Interval $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ betrachtet man das Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{cases} (x^2+3x)\cos x\, u''(x) - (x^2+3x)\sin x\, u'(x) + \lambda u(x) = 0, \\ u(\frac{\pi}{6}) + u'(\frac{\pi}{6}) = 0 = u(\frac{\pi}{3}) + u'(\frac{\pi}{3}), \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$. Seien $u_k(x), u_l(x)$ zwei Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten λ_k, λ_l. Welcher Orthogonalitätsrelation genügen u_k und u_l?

Eine Teilung durch $(x^2 + 3x)$ bringt die lineare Differentialgleichung schon im selbstadjungierter Form:

$$\cos x\, u''(x) - \sin x\, u'(x) + \frac{\lambda}{(x^2+3x)}u(x) = \big(\cos x\, u'(x)\big)' + \frac{\lambda}{(x^2+3x)}u(x) = 0,$$

also lautet die erwähnte Orthogonalitätsrelation:

$$\langle u_k; u_l \rangle_Q = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u_k(x) u_l(x) \cdot Q(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u_k(x) u_l(x) \cdot \frac{dx}{(x^2+3x)} = 0.$$