Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 06
Prof. Dr. Ferus 10. Oktober 2006

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie die Möbiustransformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$, für die:

$$T(-1) = 0, \quad T(\iota) = 2\iota, \quad T(1+\iota) = 1-\iota \quad .$$

Sei Δ die Gerade, die durch $z_1 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\iota$ läuft. Wie wird Δ durch T transformiert?

Aus $T(-1) = 0$ folgt, daß T von der Art $T(z) = \frac{z+1}{cz+d}$ ist, und wir müssen nur noch die Koeffizienten c und d bestimmen.
Die Bedingungen $T(\iota) = 2\iota, \quad T(1+\iota) = 1-\iota$ lassen sich übersetzen als

$$\begin{cases} \frac{1+\iota}{\iota c+d} &= 2\iota \\ \frac{2+\iota}{(\iota+1)c+d} &= 1-\iota \end{cases}, \text{ also: } \begin{cases} -2c+(2\iota)d &= 1+\iota \\ 2c+(1-\iota)d &= 2+\iota \end{cases}$$

Dieses System hat als einzige Lösung: $c = 2\iota, d = \frac{5}{2} - \frac{\iota}{2}$, also erhalten wir

$$T(z) = \frac{z+1}{2\iota z + (\frac{5}{2} - \frac{\iota}{2})}.$$

Aus $2\iota z_2 + (\frac{5}{2} - \frac{\iota}{2}) = \frac{\iota}{2} - \frac{5}{2} + (\frac{5}{2} - \frac{\iota}{2}) = 0$ folgt $T(z_2) = \infty$, also muß $T(\Delta)$ eine Gerade Δ' sein; Δ' läuft durch $T(\infty) = \frac{1}{2\iota} = -\frac{\iota}{2}$ und $T(0) = \frac{1}{\frac{5}{2}-\frac{\iota}{2}} = \frac{5}{13} + \frac{\iota}{13}$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie mittels Residuenkalkül die inverse Laplace-Transformierte von

$$F(s) = \frac{\sin s}{s^3+1} \quad .$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß die inverse Laplace-Transformierte f sich gewinnen lässt durch die Gleichung

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(z) \cdot e^{tz}; z_k\right),$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die (endlich vielen) Polstellen von $F(z) \cdot e^{tz}$ in der komplexen Ebene sind. (Die notwendigen Bedingungen zur Gültigkeit solcher Inversionsformel sind hier erfüllt, siehe Skript).
Hier hat man drei Polstellen der Ordnung eins, nämlich $e^{\iota\frac{(1+2k)\pi}{3}}$ für $k = 0, 1, 2$, also $z_1 = e^{\iota\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{\iota\frac{3\pi}{3}} = -1$ und $z_3 = e^{\iota\frac{5\pi}{3}} = e^{-\iota\frac{\pi}{3}} = \overline{z_1}$. Für $k = 0, 1, 2$ erhält man also:

$$\operatorname{Res}\left(F(z) \cdot e^{tz}; e^{\iota\frac{(1+2k)\pi}{3}}\right) = \left.\frac{e^{tz}\sin z}{3z^2}\right|_{z=e^{\iota\frac{(1+2k)\pi}{3}}}$$

und dann

$$f(t) = \frac{1}{3}\left\{\sin(e^{\iota\pi/3})e^{e^{\iota\pi/3}t}e^{-2\iota\pi/3} + \sin(e^{-\iota\pi/3})e^{e^{-\iota\pi/3}t}e^{2\iota\pi/3} + \sin(-1)e^{-t}\right\}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Man gebe die Laurent-Reihenentwicklung von $h(z) = \frac{e^z}{z-1}$ in den Konvergenzbereichen $K_1 : |z| < 1$ und $K_2 : |z| > 1$ an.

Im Konvergenzbereich K_1 ist die gesuchte Laurent-Reihe einfach eine Taylor-Reihe:

$$\forall z \in K_1, \quad h(z) = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) = -\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}) z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

wobei $c_n = 0$ falls $n < 0$ und $c_n = -\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}$ falls $n \geq 0$.
Im Konvergenzbereich K_2 hat man stattdessen:

$$h(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \cdot e^z = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1/z)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{l-k-1}}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n,$$

wobei

$$d_n = \sum_{l=\max(0;n+1)}^{+\infty} \frac{1}{l!} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} = e, & \text{falls } n < 0 \\ \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{1}{l!}, & \text{falls } n \geq 0. \end{cases}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie die Folge $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n \geq 0}$ für die:

$$\mathcal{Z}[\boldsymbol{f}](z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad (|z| > 1).$$

(**Hinweis:** die Funktion G gegeben durch $G(w) = \mathcal{Z}[\boldsymbol{f}](1/w)$ lässt sich an der Stelle $w = 0$ fortsetzen, und besitzt eine Taylorreihe im Bereich $|w| < 1$).

$G(w) = \frac{w^{-2}}{w^{-2}-1} = \frac{1}{1-w^2}$ besitzt die Taylorreihe $\sum_{m=0}^{+\infty} w^{2m}$ im Bereich $|w| < 1$, andererseits hat man auch per Definition (für $w \neq 0$)

$$G(w) = \mathcal{Z}[\boldsymbol{f}](\frac{1}{w}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot (\frac{1}{w})^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n w^n,$$

also gilt (Eindeutigkeit der Taylorreihe von G im Bereich $|w| < 1$)

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$